УДК 373.167.1
ББК 22.144я72
А17

Авторы:

А. Е. Абылкасымова, Т. П. Кучер, З. А. Жумагулова, В. Е. Корчевский

Условные обозначения:

— определения, свойства, правила

— проблема, которая будет решена при овладении новыми знаниями

— проанализируй и ответь на вопрос

— вопросы для закрепления

— задания для самостоятельного изучения теоретического материала

— конец доказательства теоремы или свойства

— обязательные упражнения для всех учащихся

— упражнения средней сложности

— упражнения повышенной сложности

Алгебра: Учебник для 7 кл. общеобразоват. шк. /А. Е. Абылкасымова,
А17 Т. П. Кучер, З. А. Жумагулова, В. Е. Корчевский. - Алматы: Мектеп, 2017. — 288 с., ил.

ISBN 978—601—07—0853—2

$А\ \frac{4306020503—096}{404(05)—17}$ 15(1)—17

УДК 373.167.1
ББК 22.144я72

ISBN 978—601—07—0853—2

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 4. ЭЛЕМЕНТЫ СТАТИСТИКИ

Глава 5. ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ

Глава 6. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ДРОБИ

[illegible]

Алгебра — это раздел математики, [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible], рисуем и т. п.). [illegible] *[illegible]*.

Особенность [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] [illegible] преобразования [illegible] *[illegible]*.

[illegible] алгебры [illegible] *[illegible]*, *[illegible]*, *[illegible]*, [illegible] *определение* [illegible] объяснения, почему эти свойства и правила выполняются, причем не на конкретных примерах, а в общем виде, т. е. когда числа заменены буквами. Такие объяснения являются доказательствами. Существуют разные способы доказательств.

Статистика — отрасль знаний, в которой излагаются общие вопросы сбора, измерения и анализа статистических (количественных или качественных) данных; изучение количественной стороны общественных явлений в числовой форме. При изучении элементов статистики вы научитесь строить и анализировать математические модели, отражающие свойства, характеристики и зависимости, существующие у реальных случайных явлений.

В начале работы с учебником внимательно ознакомьтесь с теми условными обозначениями, которые в нем используются, это поможет вам легко ориентироваться в учебнике.

Весь материал учебника разбит на главы и параграфы. Нужный параграф вы найдете по "Содержанию", которое находится в начале учебника. Параграфы содержат теоретический материал, задания для самостоятельной работы, вопросы для самоконтроля, упражнения различного уровня сложности и др.

Упражнения разделены по уровням [illegible]. Упражнения уровня А имеют начальный уровень сложности. Их должен уметь выполнять каждый учащийся. Упражнения уровня В несколько сложнее упражнений уровня А. Их выполнение свидетельствует об усвоении материала данного пункта. Упражнения уровня С имеют повышенный уровень сложности.

Кроме этих упражнений, имеются упражнения под рубрикой "Подготовьтесь к овладению новыми знаниями". Их выполнение поможет вам проявить самостоятельность в открытии новых для вас математических свойств, алгоритмов, признаков, правил и др.

В конце каждой главы предлагаются задания с выбором ответов под рубрикой "Проверь себя!".

В конце учебника приведены ответы к задачам.

Дорогие учащиеся, желаем успехов в изучении алгебры!

Выполните действия:

1) $3\frac{1}{9} : 2\frac{1}{3} - 2\frac{5}{6}$;

2) $1\frac{5}{7} - 4\frac{3}{13} : 1\frac{19}{26}$;

3) $10\frac{16}{17} : 8\frac{5}{11} + 1\frac{2}{3}$;

4) $\frac{47}{48} : 3\frac{13}{27} - \frac{13}{16}$.

1) $24{,}892 : 5{,}08 + 33{,}6 \cdot 6{,}5 - 230$;

2) $6{,}22 \cdot 4{,}7 - 4{,}9076 : 4{,}04 + 1{,}956$;

3) $68{,}16 : 3{,}55 + 51{,}4 \cdot 0{,}16 - 28{,}004$;

4) $7{,}06 \cdot 1{,}02 - 69{,}531 : 9{,}03 - 0{,}5012$.

1) $7{,}8 \cdot \frac{4}{13} - 61{,}5 : 13\frac{2}{3} + 198{,}8$;

2) $19{,}25 \cdot \frac{5}{11} + 5{,}76 \cdot \frac{5}{12} - 13{,}009$;

3) $4{,}625 \cdot 2\frac{2}{15} : 2{,}96 - 2\frac{4}{7}$;

4) $30{,}25 : 4\frac{5}{7} : 1{,}05 - 2\frac{1}{6}$.

Найдите значения выражений.

1) $|-7| \cdot |-2{,}1| + 5{,}6$;

2) $-40 + |-10| \cdot |-3{,}8| + 5{,}6$;

3) $|-11| \cdot |-9| - 3{,}02$;

4) $-2{,}05 + |-25| : |-16|$.

1) $|-8{,}8| : 11 + 264 : |-2{,}4|$;

2) $|-91{,}3 - 89{,}7| \cdot 0{,}5 - 104$;

3) $54{,}2 + 6{,}7 \cdot |-41{,}2 + 32{,}8|$;

4) $|-92{,}5| \cdot |-2{,}2| - 210{,}1$.

Выполните действия:

1) $\left(5\frac{5}{8} + 8\frac{2}{9}\right) : 25{,}3 - 3\frac{1}{9} + 1{,}5 : \frac{27}{28}$;

2) $117{,}5 \cdot \frac{4}{47} - 11\frac{2}{3} + \left(10\frac{2}{25} - 8\frac{7}{15}\right) : \frac{11}{45}$;

3) $89{,}8 : 59\frac{13}{15} + \frac{3}{7} - \left(42 - 41\frac{36}{49}\right) \cdot 3{,}5$;

4) $\left(73{,}6 - 72\frac{5}{9}\right) : 6\frac{4}{15} + \frac{7}{13} \cdot \left(20\frac{2}{3} - 19\frac{3}{7}\right)$;

5) $\left(17\frac{5}{14} - 29\frac{4}{21}\right) \cdot (32{,}098 + 5{,}902) : \left(49\frac{1}{7} - 30\frac{10}{21}\right)$;

6) $\left(81\frac{2}{15} - 79{,}3\right) \cdot (24{,}04 - 22{,}68) \cdot \left(1\frac{2}{3} + 1\frac{1}{9}\right)$;

7) $52,25 \cdot 49\frac{1}{7} \cdot (50,01 - 36,81) : 6\frac{1}{6} - 2\frac{1}{12}$;

8) $(28,24 - 29,[illegible]) \cdot 11,75 - 30\frac{5}{6} : 10,4 - 6\frac{1}{3}$.

Вычислите средние расстояния в миллионах километров, если от Солнца до: Венеры – 108 200 600 км; Земли – 149 600 000 км; Марса – 227 940 000 км; Юпитера – 778 330 000 км; Сатурна – 1 429 400 000 км; Урана – 2 870 990 000 км; Нептуна – 4 504 300 000 км.

Астероидное тело

Найдите значение выражения $2^{[illegible]} \cdot 5^{[illegible]} \cdot 29 + 2 \cdot 13^{[illegible]}$ и вы узнаете о самой большой скорости – скорости взлета с Земли космического корабля.

Найдите значение выражения и вы узнаете о площади некоторых озер Акмолинской области:

1) $(1 - 0,6^{[illegible]}) \cdot 10^{[illegible]}$ – столько квадратных километров составляет площадь озера Коргалжын;

2) $0,46 \cdot 10^{[illegible]} - 0,54 \cdot 10^{[illegible]} + 0,59 \cdot 10^{[illegible]}$ – столько квадратных километров составляет площадь озера Тенгиз;

3) $(199 + 12 \cdot 29) : 10$ – столько квадратных километров составляет площадь озера Кыпшак.

Космический корабль

Белый медведь – самое крупное на Земле хищное млекопитающее. Найдите значение выражения и вы узнаете о белом медведе следующее:

1) $(4\frac{1}{5} + 2,8) \cdot 10^{[illegible]}$ – от стольких килограммов $(400 \cdot 50 + 5 \cdot 8000) : 10^{2}$ – до стольких килограммов составляет средняя масса белого медведя;

2) $3(2^{[illegible]} \cdot 5^{[illegible]} + 10^{[illegible]})$ – столько килограммов составляет масса самого большого белого медведя;

Белый медведь

3) $\frac{1}{2}\left(2\frac{5}{7}+4\frac{2}{7}\right)$ – столько метров составляет длина самого большого белого медведя;

4) $3 \cdot 2^3 : 10$ – от стольких метров $2^2 \cdot 5 \cdot 13 \cdot 0{,}01$ – до стольких метров составляет средняя длина белого медведя;

5) $2^4 \cdot 3 \cdot 625$ – столько километров составляет территория белого медведя;

6) $0{,}001 \cdot 2^5 \cdot 3125$ – столько километров способен проплыть белый медведь;

7) $2^5 \cdot 5^3 \cdot 17 : 1000$ – столько килограммов вмещает желудок взрослого белого медведя;

8) $5^3 \cdot 2^2$ – столько килограммов составляет масса моржа, которого добыл белый медведь;

9) $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ – столько килограммов составляет масса кита-белухи, которого добыл белый медведь.

Найдите значения выражений:

1) $6\frac{3}{7}a - 8\frac{5}{8}b - \frac{2}{3}c$ при $a = \frac{14}{15}$; $b = 2\frac{18}{23}$; $c = -6{,}75$;

2) $2\frac{4}{11}a - 19{,}25b + \frac{4}{9}c$ при $a = 13{,}2$; $b = 2\frac{10}{11}$; $c = -10\frac{1}{8}$;

3) $36\frac{2}{3}a - 4{,}84b + 7\frac{5}{7}c$ при $a = 0{,}9$; $b = 3\frac{9}{22}$; $c = 3{,}5$;

4) $5\frac{7}{9}a - 8{,}2b + 4\frac{17}{38}c$ при $a = 3\frac{15}{22}$; $b = -\frac{25}{82}$; $c = -4\frac{5}{13}$.

1) $7\frac{2}{3}a - 1{,}5b - \frac{5}{6}c$ при $a = \frac{5}{46}$; $b = -\frac{4}{9}$; $c = \frac{14}{15}$;

2) $-\frac{20}{27}a + 1\frac{2}{25}b - \frac{8}{39}c$ при $a = -0{,}9$; $b = \frac{5}{9}$; $c = 3{,}25$;

3) $4\frac{2}{9}a + 2\frac{1}{6}b - \frac{14}{81}c$ при $a = \frac{3}{19}$; $b = 3\frac{3}{7}$; $c = 1\frac{13}{14}$;

4) $1{,}4a - \frac{51}{92}b + \frac{11}{25}c$ при $a = \frac{25}{42}$; $b = 1\frac{6}{17}$; $c = -1\frac{17}{33}$.

Сравните значения выражений:

1) $0{,}5 - \frac{4}{7} \cdot 2{,}1$ и $\left(1 - \frac{3}{18}\right) \cdot 0{,}6$;

2) $26 - \frac{5}{14} \cdot 0{,}7$ и $(0{,}86 + 0{,}17) \cdot 25$;

3) $(10{,}5 - 11{,}8)\cdot 20$ и $\frac{40}{49}\cdot 9{,}4 - 34$;

4) $7{,}4\cdot\frac{15}{37} + 19$ и $(-2{,}97 + 3{,}07)\cdot 20$.

1) $|-30|\cdot 2 - |-15|\cdot|-4|$ и $0{,}15\cdot|-60| - 8{,}9$;

2) $\left|-\frac{5}{18}\right|\cdot\left|-\frac{3}{10}\right| + \frac{7}{12}$ и $\left|-\frac{25}{26}\right|\cdot\left|-\frac{26}{75}\right| + |-1|$;

3) $|-3{,}5| + \left|-\frac{7}{8}\right|\cdot 1{,}6$ и $|-8{,}1 + 32|\cdot 0{,}01$;

4) $|49{,}2 - 50| : |-0{,}4|$ и $|201 - 401|\cdot 0{,}1$.

Упростите выражения

1) $40{,}3a - 51{,}2a + 12{,}19a - a$;

2) $-81{,}4b + 90b - 7{,}15b + 0{,}45b$;

3) $13\frac{2}{15}c - 15\frac{1}{3}c + 3{,}5c - \frac{4}{5}c$;

4) $59\frac{3}{16}t + 4\frac{1}{8}t - 64{,}25t - \frac{3}{4}t$.

1) $213{,}25x - 49\frac{5}{7}y - 215\frac{5}{6}x + 50y$;

2) $-95\frac{7}{18}a + 79b + 93{,}2a - 80\frac{4}{11}b$;

3) $-59{,}5c - 44\frac{5}{6}d - 46\frac{2}{9}d + 57\frac{2}{7}c$;

4) $200{,}75t - 81\frac{5}{14}k + 80\frac{2}{21}k - 199\frac{1}{8}t$.

Упростите выражение и найдите его значение:

1) $81{,}5y - 63\frac{4}{7}z - 99{,}4y + 64\frac{2}{3}z$ при $y = 10$; $z = -1\frac{19}{23}$;

2) $-177\frac{5}{11}t + 100{,}1k + 176\frac{1}{9}t$ при $t = -19{,}8$; $k = 50$;

3) $33{,}6n - 76\frac{3}{8}m + 78\frac{1}{9}m - 35n$ при $m = -\frac{24}{25}$; $n = 10$;

4) $29\frac{4}{13}s + 409\frac{1}{9}t - 30{,}5s - 407{,}2t$ при $s = -2{,}6$; $t = \frac{9}{43}$.

Найдите $a\%$ от числа b

1) $b = 35 + 4{,}5 \cdot 0{,}6$ и $a = 20$;

2) $b = 140 + 1{,}5 \cdot 0{,}8$ и $a = 25$;

3) $b = 7\frac{2}{3} \cdot \frac{9}{23} - 0{,}03$ и $a = 50$;

4) $b = \frac{4}{7} + 10\frac{3}{7} : 7\frac{3}{10}$ и $a = 110$.

1) $b = 0{,}02 \cdot 300 - 6\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{19}$ и $a = 144$;

2) $b = 40\frac{1}{2} : 81 + 1{,}5$ и $a = 120$;

3) $b = 505{,}2 - 9\frac{1}{5} : 92$ и $a = 260$;

4) $b = 341\frac{1}{3} : 170\frac{2}{3} + 75$ и $a = 2300$.

На территории Акмолинской области около 4000 озер. Найдите число озер, площадь которых:

1) менее 1 км^2; 2) от 1,1 до 5 км^2;
3) от 5,1 км^2 до 10 км^2; 4) от 10,1 до 50 км^2; 5) более 50 км^2,

если число этих озер соответственно составляет: 92,5%; 5,4%; 1%; 0,9%; 0,2% от общего числа озер Акмолинской области.

1) Самый тяжелый мозг — это мозг кашалота, масса которого доходит до 9 кг, т. е. он в 6 раз тяжелее мозга человека, но масса мозга кашалота составляет примерно 0,02% от массы тела кита. Каковы масса мозга человека и масса тела кита?

Кашалот

2) Самый большой нос — нос синего кита — достигает в длину 5 м и составляет до 33% от общей длины тела. Какова общая длина тела синего кита?

3) Самая длинная ящерица — варан. Он достигает в длину 4,75 м, из которых 75% приходится на хвост. Какой длины хвост варана?

Ящерица

4) Периметр треугольника равен 12 см. Длина одной из его сторон составляет 25% от периметра, длина другой стороны — $\frac{1}{3}$. Какую часть составляет длина третьей стороны треугольника от его периметра?

Узнаете об историческом событии, решив уравнение:

1) $(x - 54) : 25 = 76$, x — в марте этого года началось освоение целинных и залежных земель;

2) $(2x + 46) : 100 = 1$, x — столько новых совхозов было основано в Акмолинской области в первый год с начала освоения целины;

3) $\left(\frac{1}{5}x + 90\right) \cdot 0,1 = 10$, x — еще столько новых совхозов стали формироваться в Акмолинской области в первый год с начала освоения целины.

Вы узнаете о самом сонливом зверьке, решив уравнение:

$17x - 121 = 3x + 19 - (x + 5)$, x — столько месяцев в году спит североамериканский суслик.

Вы узнаете следующие данные, решив уравнение:

1) $2 \cdot 700 \cdot 50 = 0,1x + 200°$, x — до стольких градусов Цельсия разогревается воздух вокруг молнии за доли секунды;

2) $3(109y - 200) = 9(3y + 100)$, y — примерно во столько раз температура воздуха вокруг молнии больше температуры на поверхности Солнца.

Найдите неизвестный член пропорции:

1) $\frac{x}{3} = \frac{9,6}{11,4}$; 2) $\frac{x}{4} = \frac{49,5}{66}$; 3) $\frac{6,5}{x} = \frac{104}{114}$; 4) $\frac{16,1}{25,3} = \frac{x}{16,5}$;

5) $\frac{2\frac{3}{7}}{\left|-5\frac{3}{7}\right|} = \frac{y}{13}$; 6) $\frac{9}{y} = \frac{\left|-1\frac{1}{11}\right|}{\left|-7\frac{3}{11}\right|}$; 7) $\frac{23}{y} = \frac{\left|-3\frac{37}{19}\right|}{4\frac{4}{19}}$; 8) $\frac{y}{16} = \frac{|-76,25|}{\left|1\frac{5}{56}\right|}$.

Найдите неизвестный y из пропорции:

1) $\frac{40 - y}{30} = \frac{5}{6}$; 2) $\frac{1}{7} = \frac{21 - y}{28}$; 3) $\frac{220}{y - 19} = \frac{11}{13}$;

4) $\frac{21}{53} = \frac{220}{y + 300}$; 5) $\frac{29}{30} = \frac{78}{3y - 2}$; 6) $\frac{52}{4y + 2} = \frac{11}{3}$;

7) $\frac{13}{17} = \frac{7 + 2y}{85}$; 8) $\frac{55}{90} = \frac{6 + 5y}{18}$.

Найдите корни уравнени

1) $2(2,6x - 4) = -30 + 5,09x$; 2) $20,1x - 1,1 = 4(10 - 5,25x)$;

3) $3(17 - 22,1x) = -7 - 63,4x$; 4) $19x - 0,4 = 2(32x - 5) + 0,6$.

1) $6\frac{1}{3}y + 6,5 = 2,5 - \frac{2}{3}y$; 2) $3\frac{4}{9}y - 6,73 = 4\frac{4}{9}y + 9,27$;

3) $\frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}x + 4,63\right) = \frac{2}{3}x - \frac{1}{3} + 1,37$;

4) $\frac{4}{9}x + 1,64 - \frac{6}{11} = 1 - \left(0,36 + \frac{5}{9}x\right)$.

1) $20(x - 4) - 17(3 - 2x) = 58 + 3^2x$;

2) $-4,5(3x + 2) + 1,6(5 - 4x) = 3,1x + 1,3$;

3) $\frac{5}{21}(7 - 3x) - \frac{4}{35}(5x + 7) = \frac{2}{15} - \frac{2}{7}$;

4) $\frac{3^2}{4^2}(2^3 + x) + \frac{7}{12}(36 - x) = \frac{3}{4^2}x - 7$.

Заполните таблицу 1.

Таблица 1

Собственная скорость движения катера (в км/ч)	30		35	40		
Скорость течения реки (в км/ч)	3				3	4
Скорость движения катера по течению (в км/ч)		33	39		45	
Скорость движения катера против течения (в км/ч)		29		38		34

Решите задачи, составьте обратные задачи и решите их:

Одна мастерская может выполнить некоторую работу за 6 ч, а другая за 4 ч. Сколько потребуется времени для выполнения этой работы, если они будут работать совместно?

На прохождение некоторого пути грузовой машине требуется 7 ч, а легковой 3 ч. Через сколько часов произойдет встреча грузовой и легковой машин, если они выедут навстречу друг другу по этой дороге одновременно?

Найдите площадь квадрата, который имеет такой же периметр, как шестиугольник, у которого длины всех его сторон равны по:

1) 36 см; 2) 2 см; 3) 0,2 см; 4) 0,5 см; 5) $\frac{1}{6}$ см; 6) $\frac{2}{3}$ см.

Найдите длину стороны куба, объем которого равен объему прямоугольного параллелепипеда с измерениями: 1) 4 см, 6 см и

9 см; 2) 4 см, 10 см, 25 см; 3) 5 см, 8 см, 25 см; 4) 27 см, 8 см, 125 см; 5) 6,4 см, 2,7 см, 34,3 см; 6) 0,7 см, 4,9 см, 0,8 см.

Круг разделили на три сектора так, что первый угол в два раза больше, а второй в три раза больше третьего угла. Сколько градусов содержит угол каждого сектора?

Если задуманное число умножить на 2,6, затем найти 25% от полученного числа и прибавить к результату 0,35, то получим 1. Какое число было задумано?

Из некоторого пункта вниз по течению реки вышла лодка, скорость которой по течению реки 14 км/ч. Через 1 ч из этого же пункта в том же направлении вышел катер, собственная скорость которого 31 км/ч. Через сколько часов после своего выхода катер догонит лодку, если скорость течения реки 3 км/ч?

Из некоторого пункта вниз по течению реки вышла лодка, скорость которой по течению реки 15 км/ч. Через 1 ч из этого же пункта в противоположном направлении вышел катер, собственная скорость которого 33 км/ч. Через сколько часов после начала движения катера расстояние между ними будет 114 км, если скорость течения реки 3 км/ч?

Составьте формулу для решения задачи: К концу рабочего дня в магазине остались нераспроданными a кг яблок и еще завезли 5 коробок по b кг яблок. Сколько килограммов яблок стало в магазине? Ответьте на вопрос задачи, если $a = 5,75$, $b = 4,25$.

Узнайте дату рождения по формуле $y = x + 37^2$, если:

1) $x = 25^2 - 101$, то y — год рождения Магжана Жумабаева — поэта, одного из основоположников казахской литературы;

2) $x = 24^2 - 10^2$, то y — год рождения Абая Кунанбаева — поэта-просветителя, основоположника казахского литературного языка;

3) $x = 22^2 - 2 \cdot 3^2$, то y — год рождения Чокана Валиханова —


М. Жумабаев


А. Кунанбаев


Ч. Валиханов


Ж. Жабаев

просветителя, путешественника, исследователя истории и культуры народов Средней Азии, Казахстана и Восточного Туркестана;
4) $x = 21 - 2 \cdot 3^7$, то y — год рождения Жамбыла Жабаева — поэта, продолжателя гуманистических традиций народной поэзии, для него характерным было откликаться на самые жизненно важные для народа события.

Найдите координаты точек, изображенных на рисунке 1. С помощью рисунка ответьте на вопросы:

1) какие точки лежат левее начала координат;

2) какие точки лежат правее начала координат;

3) какая точка лежит ближе к началу координат?

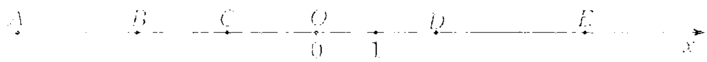


Рис. 1

Найдите координаты точек, отмеченных на рисунке 2.
Отметьте на координатной прямой:
1) точки, координаты которых противоположны координатам данных точек;
2) две точки, расположенные между точками C и D, запишите их координаты;
3) точку, которая лежит правее (левее) от всех изображенных точек, и запишите ее координату.

Рис. 2

1) Назовите целые числа, расположенные на координатной прямой между числами: а) −1 и 3; б) −3,5 и 0; в) −7,3 и −2; г) −0,99 и 2,1.
2) Между какими соседними целыми числами координатной прямой заключено число: а) 4,7; б) −3,2; в) 0,6; г) −9,99?

Найдите координаты точек, отмеченных на координатной плоскости (рис. 3). Какие из этих точек лежат: 1) на оси Ox; 2) на оси Oy; 3) в I четверти; 4) во II четверти; 5) в III четверти; 6) в IV четверти?

В прямоугольной системе координат отметьте точки $A(-3; 2)$; $B(0; -2)$; $C(1,5; -1)$; $D(-4; 0)$; $E(2,5; -3,5)$. В каких координатных четвертях лежат данные точки? Отметьте точки в других четвертях и напишите их координаты.

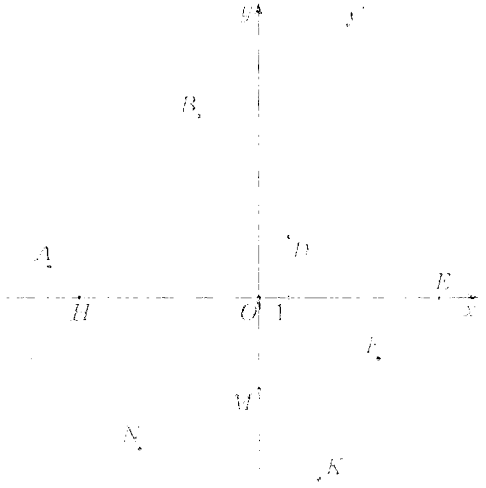


Рис. 3

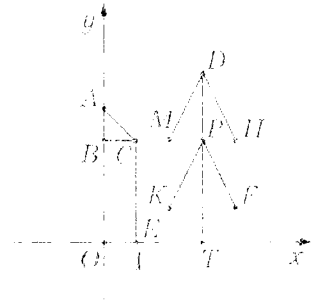


Рис. 4

Не выполняя построений, запишите координаты точек M, H, K, которые соответственно симметричны точкам $A(5;\ 6)$; $B(-2;\ 0)$; $C(0;\ 8)$ относительно: 1) оси абсцисс; 2) оси ординат; 3) начала координат.

Запишите координаты точек A, B, C, E, D, M, H, K, F, T, P, изображенных на рисунке 4.

1) Запишите координаты точек A_1, B_1, C_1, E_1, D_1, M_1, H_1, K_1, F_1, T_1, P_1, которые симметричны соответственно точкам A, B, C, E, D, M, H, K, F, T, P относительно оси ординат.

2) Постройте точки A_1, B_1, C_1, E_1, D_1, M_1, H_1, K_1, F_1, T_1, P_1 и проведите отрезки AC_1, BC_1, C_1E_1, D_1M_1, D_1H_1, P_1K_1, P_1F_1, D_1T_1.

Постройте точки $A(0;\ 1{,}5)$ и $B\,(2;\ 6)$.

1) Проведите отрезки AB и BO и измерьте их длины с точностью до 1 мм.

2) Найдите координаты точки F, симметричной точке B относительно оси ординат и координаты точек E, D, C, симметричные соответственно точкам F, A и B относительно оси абсцисс.

3) Проведите ломаную $ABOCDEFA$ и найдите ее длину с точностью до 1 мм.

Постройте точку $A\,(3;\ 4)$ и точку B, у которой абсцисса такая же, как у точки A, а ордината составляет 50 % от ординаты точки B. Постройте точку C, у которой ордината такая же, как у точки B, а абсцисса в 2 раза больше абсциссы точки B. Постройте точку T, у которой ордината равна нулю, а абсцисса такая же, как у точки C. Постройте точки D, M, K, F, симметричные относительно оси ординат соответственно точкам A, B, C, T. Найдите периметр и площадь фигуры $ABCTFKMDA$, если длина единичного отрезка равна 5 мм.

Решите уравнения

1) $40 + 2x = 3x - 15$;

2) $16x - 33 = 1 + 13x$;

3) $23{,}8y - 80 - 24{,}3y = 2$;

4) $95y - 4{,}9 = 98y - 1$;

5) $8\frac{1}{15}z - 27 = 9z - 13$;

6) $\frac{41}{45}t + \frac{2}{9} = 1\frac{2}{9}t - \frac{7}{9}$.

1) $16{,}05x + 1{,}8x = 3{,}6\text{[illegible]} - 0{,}\text{[illegible]}x$;

2) $5\frac{1}{6} + \frac{4}{15}t = -\frac{2}{5}t - \frac{2}{3}$;

3) $1{,}09 + 5{,}8y = 38{,}29 - 15{,}1y$;

4) $19t - \frac{3}{8} = \frac{5}{7} - 42t$;

5) $\frac{5}{7}x + 2\frac{1}{7} = 3\frac{3}{28} - \frac{4}{7}x$;

6) $\frac{6}{11} - 31{,}28k = -\frac{2}{3} + 8{,}72k$.

Найдите корни уравнений

1) $17x - 2{,}6 = 3(0{,}8 + 3x)$;

2) $8 + 5{,}1x = 49(1 - 0{,}1x)$;

3) $3\text{[illegible]}(0{,}1x + 1) = 40 - 3{,}2x$;

4) $63x - 13{,}7 = 13(0{,}1 + 5x)$;

5) $23(x - 0{,}1) = 17x + 2{,}7$;

6) $33(0{,}1x + 1) = 4 - 6{,}7x$.

1) $3(2x - 4) + 15 = 16 - 5(2 - x)$;

2) $4{,}5(6 - z) - 0{,}5z = 1 + 0{,}5(z + 3)$;

3) $\frac{23}{40}(8t + 5) - t = 2{,}6t - (3t - \frac{3}{4})$;

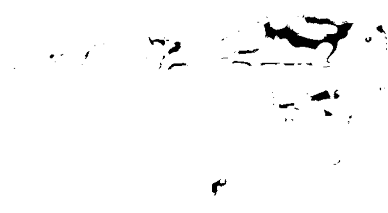
4) $10\frac{2}{3}(9 - k) + 81 = 107 - \frac{1}{3}(k - 60)$.

Решите уравнения и вы узнаете о Маркакольском заповеднике, который находится в Восточно-Казахстанской области:

1) $x + 0{,}24 = 20 + 0{,}99x$,

x — год создания заповедника;

2) $3y - 2(169{,}9 + y) = 150 - (y + 3\text{[illegible]}9{,}8)$,



Маркакольский заповедник

y — столько тысяч гектаров составляет площадь заповедника;

3) $50z + (z - 6,2) = 200$,

z — столько тысяч гектаров занимает в этом заповеднике лес.

Узнайте температуру воздуха на различных высотах, решив уравнения:

1) $3x + (x + 2) = 2(3x + 12)$,

x °C — температура воздуха на высоте 4000 м;

2) $-3(2,5 - y) = 28,5 + 4,5y$,

y °C — температура воздуха на высоте 6000 м;

3) $25,8z - 4,3(6z + 300) = 25,8z$,

z °C — температура воздуха на высоте 10 000 м.

Узнайте наибольшую продолжительность жизни насекомого, пресмыкающегося и зверька, решив уравнения:

1) $12,5 - (16x - 28,3) = -71,2$,

x лет — наибольшая продолжительность жизни муравья;

2) $31,9 - \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{7}y\right) = 1\frac{2}{3}y - 4,8$,

y лет — наибольшая продолжительность жизни ящерицы;

3) $\frac{13}{15}z - \left(\frac{7}{9} + \frac{1}{3}z\right) = -7\frac{2}{9}$,

z лет — наибольшая продолжительность жизни белки.

Найдите корни уравнений

1) $|x| - 20,9 = 22$;

2) $315 - |x| = 288$;

3) $|x| - 74,6 = 9,4$;

4) $15\frac{2}{15} - |x| = 7\frac{1}{12}$;

5) $|x| - 21,9 = 6\frac{2}{3}$;

6) $100,3 - |x| = 101\frac{8}{9}$.

1) $|x| + 5|x| - 40 = 4|x|$;

2) $100 - |x| = 49|x| + 124$;

3) $6|x| - 2|x| + 35 = 16|x|$;

4) $29|x| - |x| - 13 = 22|x|$.

При каких значениях переменной верно равенство:

1) $|x - 1| = x - 1$;

2) $|2 - x| = 2 - x$?

При каких значениях a уравнение $10 - x^2 = a$: 1) имеет решения; 2) не имеет решений; 3) решение равно нулю; 4) решение равно 10?

Изобразите на одной координатной прямой: 1) числовой интервал и числовой луч; 2) числовой отрезок и открытый числовой луч. Рассмотрите все возможные случаи и для каждого случая найдите объединение и пересечение числовых промежутков.

Перечислите все натуральные числа, принадлежащие пересечению числовых промежутков:

1) $(1; 8)$ и $(-5; 7]$; 2) $[-2; 3]$ и $(-1; 5)$;

3) $(-\infty; 6]$ и $[4; +\infty)$; 4) $(-10; 2]$ и $[-7; 1)$.

Найдите наибольшее (наименьшее) натуральное число, принадлежащее пересечению числовых промежутков:

1) $(-10; 6)$ и $(1; +\infty)$; 2) $[5; 29]$ и $[20; +\infty)$;

3) $(-3; 13]$ и $[-4; +\infty)$; 4) $(21; +\infty)$ и $(-20; 21]$.

Найдите наибольшее (наименьшее) целое число, принадлежащее пересечению числовых промежутков:

1) $[3,5; 7,1]$ и $(1; 14,9)$; 2) $\left(-\infty; \frac{3}{7}\right]$ и $\left[-\frac{8}{9}; +\infty\right)$;

3) $(-\infty; +\infty)$ и $\left[-7\frac{1}{3}; 5\frac{1}{3}\right]$; 4) $(-5,1; 9,1)$ и $(-\infty; +\infty)$.

Найдите наименьшее натуральное число, являющееся решением неравенства:

1) $10 + 7x > 24$; 2) $19 + 6x > -5$;

3) $-43x + 2 < 45$; 4) $60 + 17x > -19$;

5) $83 + x < 84x$; 6) $-7 - 30x < 5x$.

Найдите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства:

1) $0,5x - 41,5 < 42$; 2) $90 - \frac{1}{3}x > 91$;

3) $\frac{2}{3}x - 15 < 20$; 4) $18\frac{1}{9} - 0,2x > 18$;

5) $31 - 4\frac{1}{7}x > 2$; 6) $30,08 < -\frac{8}{9}x - 1,92$.

1) $-4y - 10 \geq 2(1 - y) + 24$; 2) $49 - 3(3 - 2z) < 1 - 4z$;

3) $7(6 - 5t) - 5 < 1 - 41t$; 4) $-0,5(8x + 9) \geq 0,9 - 4x - 5$.

1) $\frac{3x-1}{2} < \frac{6-2x}{3}$;

2) $\frac{10-x}{6} > \frac{x-7}{5}$;

3) $\frac{3+2x}{12} < \frac{3x-2}{15}$;

4) $\frac{y+5}{18} < \frac{6-y}{24}$.

Решите неравенства

1) $3{,}3x - 0{,}4(4 - 3x) \leqslant 9{,}3 + 5(0{,}7 - x)$;

2) $9(0{,}5y + 1) - 3{,}1(1 - y) > 5{,}9 + 7{,}2y$;

3) $0{,}6(a - 2) - 0{,}2 \geqslant 0{,}8(a - 2) + 3{,}5$;

4) $-1{,}4 + 0{,}5(11b - 2) < -5{,}5b - 1{,}6$.

1) $5\frac{2}{3} - \frac{7}{3}(14x - 3) > \frac{4}{9}(18x - 2)$;

2) $\frac{5}{6}(7 + 9y) \leqslant 7\frac{1}{2} - \frac{7}{8}(5y - 8)$;

3) $30 - \frac{1}{5}(2 - 15z) \geqslant \frac{2}{3}(15z + 1)$;

4) $\frac{3}{4}(8t + 1) < \frac{5}{6}(16t - 3) - 12\frac{1}{2}$.

1) $\frac{x-3}{11} - \frac{x-7}{35} - \frac{2x+3}{5} \geqslant 0.1$;

2) $\frac{5-3y}{11} + \frac{y-4}{10} - \frac{2+3y}{22} < \frac{2}{11}$;

3) $\frac{8x-1}{8} + \frac{7-4x}{5} - \frac{x+3}{20} > \frac{3}{40}$.

Решите систему неравенст

1) $\begin{cases} 20x - 40 \leqslant 0, \\ \frac{2}{9} - \frac{4}{27}x > 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3\frac{1}{3} - 10x < 0, \\ 1{,}6 - 4{,}8x < 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 10 + 5x > -20, \\ \frac{5}{11} - \frac{20}{33}x > 0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 7\frac{2}{7} - 51x < 0, \\ 3x + 40 \leqslant 52. \end{cases}$

1) $\begin{cases} 2(x+5) < 2 - 2x, \\ 3(2 - x) \geqslant 3 - x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3(x+8) > 9 - 2x, \\ 3(x+4) \geqslant x + 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 4(x-1) \leqslant 9 - 2x, \\ 2(x+5) \leqslant 1 - x; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4(3-x) \geqslant 2 - 2x, \\ 3(x-2) \geqslant 2 - x. \end{cases}$

1) $\begin{cases} 3x+5(x-2)<3-2x, \\ 4(5x-1)-21x>1-3x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 7-11x<9x-2(5x+7), \\ 6-x\ge 2(1-4x)+3(1-3x). \end{cases}$

3) $\begin{cases} 5(6x-5)<3(4x-3)+2, \\ 2(6x-1)-12+9x>5(8x-1); \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 3(2x-13)-2(x-2)>10x-4, \\ 3(4x-9)+2(x-1)<16x+2. \end{cases}$

Найдите все целые числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} x-1>\dfrac{2x-0,5}{3}, \\ \dfrac{7x-12}{2}<x+1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \dfrac{9x-13}{8}>x-2, \\ 1+x>\dfrac{10x-6}{4}. \end{cases}$

Найдите все натуральные числа, являющиеся решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} \dfrac{7,1x-23}{21}<1+0,4x, \\ 3x-5<\dfrac{20x-31}{7}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 1-2x<\dfrac{28-53x}{27}, \\ 0,1x+3<\dfrac{13-0,7x}{3}. \end{cases}$

1) Если к удвоенному целому числу прибавить его половину, то получится число, которое больше 17, а если из утроенного этого же целого числа вычесть его половину, то получится число, которое меньше 18. Найдите это целое число.

2) Если к $\frac{3}{10}$ от целого числа прибавить 0,25, то получится число, которое меньше 5, а если от $\frac{7}{9}$ этого же числа вычесть $\frac{1}{3}$, то получится число, которое больше 11. Найдите это целое число.

1) Если к целому числу прибавить 10% от этого же числа, то получится число, которое больше 47, а если из этого же числа вычесть 65% этого же числа, то получится число, которое меньше 12. Найдите это целое число.

2) Если от целого числа вычесть его 11%, то получится число, которое больше 88, а если к этому же целому числу прибавить 121% этого числа, то получится число, которое меньше 221. Найдите это целое число.

Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 4x+7,8>45x-4,2, \\ 18-1,1x\leqslant 4,1x+13,5, \\ 5,5-3,4x<40,5-8,4x; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 17,3-29x\geqslant -35x-6,7, \\ 1,5x+13,1<\frac{1}{2}x-18,1, \\ 6\frac{1}{3}x-27,8\leqslant 21,2-\frac{2}{3}x. \end{cases}$

Запишите в виде неравенства с модулем числовые промежутки, изображенные на рисунке 5.

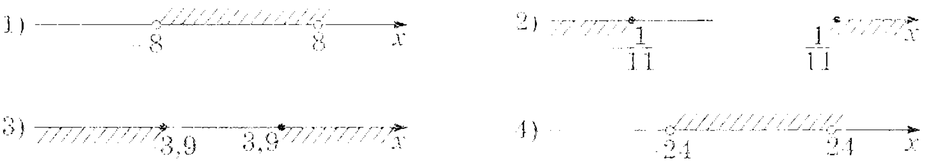


Рис. 5

Изобразите на координатной прямой решение неравенства:

1) $|x|\leqslant 5,6$;

2) $|x|<17$;

3) $|x|>4\frac{3}{16}$;

4) $|x|\geqslant 9$;

5) $|x|>10$;

6) $|x|\leqslant 8,14$;

7) $|x|<3\frac{5}{6}$;

8) $|x|\geqslant 20$.

Решите неравенство:

1) $|1+2x|<9$;

2) $|3+2x|\leqslant 5$;

3) $|1-2x|\geqslant 7$;

4) $|2-5x|>22$.

5) $|3x+5|\geqslant 20$;

6) $|4+3x|\leqslant 5$;

7) $|7-4x|\leqslant 11$.

8) $|6x-5|\geqslant 1$.

9) $|1-2x|<4$;

10) $|0,8-\frac{1}{3}x|>0,2$;

11) $|2,5x-1|<1,5$;

12) $|-4x+\frac{1}{9}|\leqslant\frac{5}{9}$.

Решите систему неравенств:

1) $\begin{cases} 147-3x \geqslant 51, \\ |x| < 11, \\ 1+0{,}5x > 0{,}5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \leqslant 1{,}5, \\ 60x-8 < 9x+9, \\ |x| < 9{,}7. \end{cases}$

Найдите значение суммы всех целых чисел, которые являются решениями системы неравенств:

1) $\begin{cases} |x| < 4, \\ |x| \geqslant 1, \\ x > -3; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} |x| \leqslant 10, \\ x > -7, \\ x < 2; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} |x| > 2, \\ x < 4, \\ |x| < 5. \end{cases}$

Решив следующую систему неравенств, вы узнаете о скорости таких ветров:

1) $\begin{cases} \frac{1}{5}y > 4, \\ \frac{1}{7}y < 4; \end{cases}$ y км/ч — скорость умеренного ветра;

Шторм

2) $\begin{cases} 10y - 390 < 0, \\ 0{,}1y \geqslant -5; \end{cases}$ y км/ч — скорость сильного ветра;

3) $\begin{cases} 15(5-z) \leqslant -14z, \\ 29(z-3) \leqslant 28z; \end{cases}$ z км/ч — скорость ветра при шторме;

4) $\begin{cases} 50-0{,}5z \leqslant -9, \\ 9 - \frac{1}{3}z \leqslant -1; \end{cases}$ z км/ч — скорость ветра при урагане.

Решите систему уравнений

1) $\begin{cases} 4x+3y=-7, \\ 2x-y=9; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 5x+6y=3, \\ x-2y=-9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 6x+y=-1, \\ 12x-7y=61; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x-4y=-42, \\ 9x+8y=62. \end{cases}$

1) $\begin{cases} 8x + 15y = -56, \\ 4x - 7y = 30; \end{cases}$

2) $\begin{cases} 6x - 9y = 88{,}5, \\ 5x + 3y = 47{,}5; \end{cases}$

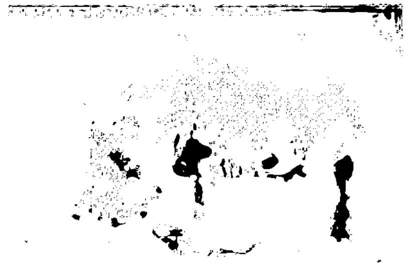
3) $\begin{cases} 11x + 10y = 73{,}5, \\ 6x - 5y = -54; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 2x + 13y = -69, \\ 14x + 11y = -3. \end{cases}$

Вы узнаете, у кого из животных самая большая пасть, решив систему уравнений с двумя переменными:

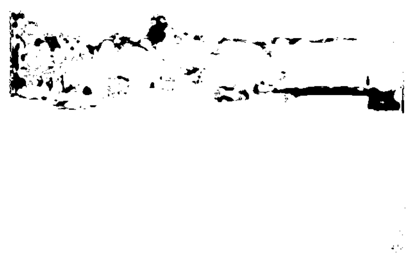
$$\begin{cases} x + y = 300, \\ \frac{1}{2}x - 0{,}5y = 30; \end{cases}$$

x — под таким углом может распахнуть пасть бегемот;
y — столько сантиметров достигает расстояние между челюстями бегемота.



бегемот

Решите систему уравнений и вы узнаете о Наурызымском заповеднике, который находится в Костанайской области:



Наурызымский заповедник

1) $\begin{cases} x + y = 3897, \\ x - y = 35; \end{cases}$

x — в этом году Наурызымский заповедник был реорганизован;
y — в этом году был организован Наурызымский заповедник;

2) $\begin{cases} x + 10y = 1197, \\ 20y - x = 1434; \end{cases}$

x — столько тысяч гектаров была площадь Наурызымского заповедника первоначально;
y — столько тысяч гектаров стала площадь Наурызымского заповедника после реорганизации;

3) $\begin{cases} 0{,}1x + 0{,}01y = 32, \\ 2x + y = 1200; \end{cases}$

x — столько видов птиц в Наурызымском заповеднике;

y — примерно столько видов растений в Наурызымском заповеднике;

4) $\begin{cases} 1{,}5x+2{,}5y = 75, \\ \dfrac{1}{20}x + \dfrac{1}{6}y = 3; \end{cases}$

x — примерно столько видов млекопитающих в Наурызымском заповеднике;
y — столько видов рыб в Наурызымском заповеднике.

Решите систему уравнений:

1) $\begin{cases} x = -7 + y, \\ 2x - 3y = -16; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y = x - 5, \\ 4x + y = 10; \end{cases}$

3) $\begin{cases} -x = 3 - 2y, \\ x - 5y = -6; \end{cases}$
4) $\begin{cases} y = 4-5x, \\ y-7x=-8. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x + 2y = 0{,}3, \\ x = -y + 0{,}5; \end{cases}$
2) $\begin{cases} y-8x = 83{,}1, \\ y = -x-6{,}9; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 21x + y = -15{,}1, \\ y = 0{,}9 - x; \end{cases}$
4) $\begin{cases} -2{,}5y+x=-12{,}8, \\ x=1{,}2-y. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x - y = -\dfrac{5}{7}, \\ 4x + 3y = -4\dfrac{6}{7}; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 10x - 3y = \dfrac{94}{9}, \\ x + y = -\dfrac{14}{9}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 9x + 2y = -\dfrac{19}{7}, \\ y - x = \dfrac{10}{21}; \end{cases}$
4) $\begin{cases} 7x - 6y = \dfrac{40}{3}, \\ y + x = -\dfrac{11}{3}. \end{cases}$

1) $\begin{cases} 3(x-2) - 2(y+1) = -16, \\ 5(x+3) - 8(y-2) = 13; \end{cases}$
2) $\begin{cases} -6(4-x)+(y+5)=2, \\ 11(1+x)-9(7-y)=-36. \end{cases}$

1) $\begin{cases} \dfrac{4x-3}{2} + \dfrac{5y+1}{3} = 12{,}5, \\ 1{,}5x-0{,}7y=-3{,}4; \end{cases}$
2) $\begin{cases} 2{,}3x-1{,}9y=0{,}8, \\ \dfrac{4-3y}{4} + \dfrac{-5x-2}{3} = -4{,}5. \end{cases}$

В магазине игрушек представлены следующие цены на различные типы игр:

Таблица 2

Тип игр	A	B	C	D	E	F	G	H	K	L
Цена (в тг)	430	560	630	520	320	610	440	710	360	736

1) Найдите число типов игр, стоимость которых не превышает 500 тг.

2) Отец решил приобрести своей маленькой дочери две разные игры, потратив на это не более 1000 тг. Найдите число вариантов такой покупки.

3) В магазине на всю покупку действует скидка 15% , если клиент покупает сразу три игры. Запишите, какие три разные настольные игры может приобрести отец своей дочери на сумму не более 1000 тг?

1) Коллекция моделей одежды разной цветовой гаммы представлена в виде диаграммы (рис. 6). Сколько в коллекции моделей красного цвета, если всего в ней 80 моделей?

2) Результаты анализа полученной прибыли предприятия за год представлены в виде круговой диаграммы (рис. 7). Какая прибыль была получена предприятием в 3 квартале, если за год она составила 2400 тыс. тг?

Рис. 6

Рис. 7

Для чего нужно знать о степени с натуральным показателем

Если какое-либо число обозначить буквой a, число множителей n, то можно записать:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n.$$

В выражении a^n число a (повторяющийся множитель) называется *основанием степени*, n (число, показывающее, сколько раз повторяется множитель) – *показателем степени*, a^n – *степенью*.

При чтении степени сначала читают ее основание, а затем ее показатель.

Чтение выражения a^n:

- a в степени n;
- степень числа a с показателем n.

Степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется *произведение n множителей*, каждый из которых равен a: $\underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n} = a^n$.

Любое число в первой степени равно этому числу, т. е. $a^1 = a$.

записи числа во второй и третьей степени называются *квадратом числа* и *кубом числа*.

Если $a > 0$ и n — натуральное число, то $a^n > 0$, т. е. степень любого положительного числа с натуральным показателем есть число положительное.

Если $a < 0$ и n — четное число, то $a^n > 0$, т. е. в четной степени отрицательное число есть число положительное; если $a < 0$ и n — нечетное число, то $a^n < 0$, т. е. в нечетной степени отрицательное число есть число отрицательное.

Рассмотрите примеры: $8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$;

$\left(\frac{6}{7}\right)^4 = \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{6}{7} = \frac{1296}{2401}$;

$(-0,3)^5 = (-0,3) \cdot (-0,3) \cdot (-0,3) \cdot (-0,3) \cdot (-0,3) = -0,00243$;

$x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x \cdot x = x^8$.

Какими числами (натуральными, дробными — положительными или отрицательными и др.) может быть основание степени с натуральным показателем?

Основанием степени могут быть любые рациональные числа: натуральные, нуль, дробные — положительные и отрицательные, любая переменная.

Действие, с помощью которого находят значение степени, называется *возведением в степень*.

Возведение в степень — действие третьей ступени. Вам были известны действия первой ступени (сложение и вычитание) и второй ступени (умножение и деление). Также вы знаете, что при нахождении значения числового выражения, не содержащего скобок, сначала выполняются действия второй, а затем первой ступени.

При наличии действия третьей ступени надо руководствоваться правилом:

если числовое выражение не содержит скобок, то сначала выполняются действия третьей ступени, затем — второй и, наконец, — действия первой ступени.

Например, $6 : \frac{1}{8} - \frac{5}{9} \cdot (-3)^4 + 0{,}1 \cdot 10^2 = 6 : \frac{1}{8} - \frac{5}{9} \cdot 81 + 0{,}1 \cdot 100 = 48 - 45 + 10 = 13$.

Запись чисел в виде степени используется во многих случаях. *Например*, для записи натуральных чисел в виде суммы разрядных слагаемых и в виде десятичной записи: $82\,345 = 8 \cdot 10\,000 + 2 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 5 = 8 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10 + 5$.

Для записи больших чисел часто применяются степени числа 10.

Например, энергию, которую получает Земля от Солнца за 1 год, записывают: 10[illegible] Дж, энергию урагана — 10[illegible] Дж, длину кровеносной системы человека — 10[illegible] км.

Запишите в виде степени произведение:

1) $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$;   2) $(-1{,}2) \cdot (-1{,}2) \cdot (-1{,}2) \cdot (-1{,}2) \cdot (-1{,}2)$;

3) $\frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7} \cdot \frac{2}{7}$;   4) $b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$;

5) $(t - k) \cdot (t - k) \cdot (t + k) \cdot (t + k)$;

6) $\frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y} \cdot \frac{x}{y}$.

Упростите выражения, используя запись в виде степени произведения

1) $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 \cdot 11$;   2) $\frac{4}{9} \cdot \frac{4}{9} \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13 \cdot 13$;

3) $1{,}7 \cdot 1{,}7 \cdot 1{,}7 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6}$;   4) $\left(-\frac{5}{11}\right) \cdot \left(-\frac{5}{11}\right) \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4$.

1) $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot c \cdot c \cdot c$; 2) $0{,}6 \cdot 0{,}6 \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d \cdot d$;

3) $k \cdot k \cdot k \cdot k \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s$; 4) $\frac{t}{m} \cdot \frac{t}{m} \cdot \frac{t}{m} \cdot n \cdot n \cdot n \cdot n$;

5) $(2-b) \cdot (2-b) \cdot (2-b) \cdot (2-b) \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y \cdot y$.

Запишите в виде произведения одинаковых множителей степени

1) 23^5; 2) $\left(\frac{9}{17}\right)^6$; 3) $7{,}3^4$; 4) $(-0{,}1)^7$.

1) $(3c)^7$; 2) $\left(t - \frac{5}{14}\right)^3$; 3) $(8s+1)^4$;

4) $\left(\frac{2}{7}ab\right)^4$; 5) $(n+m)^6$; 6) $(0{,}9kst)^3$.

Вычислите

1) 6^3; 2) $1{,}4^3$; 3) $(-8)^4$; 4) $\left(-\frac{2}{3}\right)^4$; 5) $(-0{,}2)^5$.

1) 10^4; 2) $(-0{,}7)^2$; 3) $\left(-\frac{3}{4}\right)^4$; 4) $\left(1\frac{4}{5}\right)^3$.

1) $(-2{,}8)^3$; 2) $\left(2\frac{1}{2}\right)^5$; 3) 7^3; 4) $1{,}1^2$; 5) $\left(-\frac{3}{5}\right)^3$.

Выполните действия

1) $5^2 - 200$; 2) $13 - 3^3$; 3) $20 + 2^6$; 4) $2^4 - 3^2$.

1) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{29}{32}$; 2) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \frac{22}{27}$; 3) $\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \frac{11}{25}$;

4) $(1{,}2)^2 + 2{,}06$; 5) $(0{,}4)^4 - 1$; 6) $20 - (1{,}4)^2$.

1) $3^5 - 2^6 : 40$; 2) $4^4 : 1000 - 0{,}3$;

3) $7^2 \cdot 2^4 + 608$; 4) $8^2 \cdot 3^3 - 728$.

Упростите выражение, используя запись в виде степени произведения:

1) $\underbrace{15 \cdot 15 \cdot \ldots \cdot 15}_{15\ \text{раз}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{22\ \text{раза}}$; 2) $\underbrace{2{,}8 \cdot 2{,}8 \cdot \ldots \cdot 2{,}8}_{10\ \text{раз}} \cdot \underbrace{c \cdot c \cdot \ldots \cdot c}_{37\ \text{раз}}$;

3) $\underbrace{\frac{10}{19} \cdot \frac{10}{19} \cdot \ldots \cdot \frac{10}{19}}_{18\ \text{раз}} \cdot \underbrace{y \cdot y \cdot \ldots \cdot y}_{11\ \text{раз}}$; 4) $\underbrace{(-7) \cdot (-7) \cdot \ldots \cdot (-7)}_{15\ \text{раз}} \cdot \underbrace{z \cdot z \cdot \ldots \cdot z}_{22\ \text{раза}}$;

5) $\underbrace{24 \cdot 24 \cdot \ldots \cdot 24}_{20\ \text{раз}} \cdot \underbrace{(x+3)(x+3) \cdot \ldots \cdot (x+3)}_{48\ \text{раз}}$;

6) $\underbrace{\frac{d}{4} \cdot \frac{d}{4} \cdot \ldots \cdot \frac{d}{4}}_{19\ \text{раз}} \cdot \underbrace{t \cdot t \cdot \ldots \cdot t}_{50\ \text{раз}}$.

Упростите выражение:

1) $x \cdot x \cdot x \cdot x + b \cdot b \cdot b \cdot b \cdot b$;

2) $y \cdot y \cdot y - s \cdot s \cdot s \cdot s \cdot s$;

3) $(5a) \cdot (5a) \cdot (5a) \cdot (5a) - \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n}$;

4) $\frac{a}{5} \cdot \frac{a}{5} \cdot \frac{a}{5} \cdot \frac{a}{5} + z \cdot z$.

Выполните действия:

1) $10^3 - 5^2 : 8 + \left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot 81$;

2) $2{,}43 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 6^2(2^5 - 28)$;

3) $9^3 - 15^2 : 16 + \left(\frac{3}{4}\right)^3 : \frac{27}{32}$;

4) $(7^2 - 51)^3 \cdot \frac{5}{9} + 3{,}6 : 9^2$.

Найдите 25 % от числа x, если:

1) $x = \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot 4^3 \cdot 3^4$;

2) $x = 3^3 \cdot 2^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^2$;

3) $x = \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot 24 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2$;

4) $x = \left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot 27 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$.

Сравните значения выражений:

1) $8^3 - 600$ и $17^2 - 4^4$;

2) $-10^4 + 9^4$ и $(-15)^3$;

3) $0{,}4^2 + 1{,}6 \cdot 1{,}1$ и $1{,}5^2 - 11 \cdot 0{,}5^3$;

4) $(-2{,}2)^3 + 0{,}603 \cdot 2^4$ и $368 - 2^5 \cdot 6^4$.

Каким свойством обладает умножение степеней с одинаковыми основаниями?

Рассмотрите произведение двух степеней с одинаковыми основаниями, *например* $a^6 \cdot a^2$.

Как видим, при умножении двух степеней с одинаковыми основаниями основание степени осталось тем же, а показатель 8 получился в результате сложения показателей первой и второй степеней.

Этим свойством обладают все степени с одинаковыми основаниями. Докажем это, т. е. объясним в общем виде, почему это свойство верно.

Если a — любое рациональное число и m, n — любые натуральные числа, то

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}.$$

В самом деле:

$$a^m \cdot a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ раз}} = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{(m+n) \text{ раз}} = a^{m+n}.$$

Таким образом, доказали свойство степени с натуральным показателем:

произведение двух степеней с одинаковыми основаниями равно степени с тем же основанием и показателем, равным сумме показателей данных степеней.

При преобразовании произведения двух степеней с одинаковыми основаниями и натуральными показателями можно пользоваться правилом:

Чтобы умножить степени с одинаковыми основаниями, надо основание оставить прежним, а показатели сложить.

Это правило можно использовать при нахождении произведения трех и более степеней с натуральными показателями и одинаковыми основаниями.

Представьте в виде степени выражение:

1) x^5x^{12}; 2) y^4y^{11}; 3) $z^{20}z^6$;

4) $40^{20}\cdot 40^3$; 5) $(0,3)^7\cdot(0,3)^{29}$; 6) $(8,4)^2\cdot(8,4)^{15}$;

7) $\left(\frac{2}{7}\right)^{31}\cdot\left(\frac{2}{7}\right)^6$; 8) $\left(\frac{15}{19}\right)^3\cdot\left(\frac{15}{19}\right)^{19}$; 9) $\left(4\frac{4}{9}\right)^{14}\cdot\left(4\frac{4}{9}\right)^{28}$;

10) $(-5)^4\cdot(-5)^{11}$; 11) $\left(-\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^8$; 12) $(-6,2)^6\cdot(-6,2)^7$;

13) $(-c)^{10}\cdot(-c)^{31}$; 14) $\left(-\frac{d}{2}\right)^9\cdot\left(-\frac{d}{2}\right)^9$; 15) $(-1,4k)^5\cdot(-1,4k)^{20}$.

1) $(3-a)^4\cdot(3-a)^{10}$; 2) $(x+y)^3\cdot(x+y)^{15}$;

3) $(2b-3)^6\cdot(2b-3)^{23}$; 4) $\left(\frac{1}{2}c+2\right)^{21}\cdot\left(\frac{1}{2}c+2\right)^{14}$;

5) $\left(4-\frac{2}{3}t\right)^{10}\cdot\left(4-\frac{2}{3}t\right)^2$; 6) $(9,2-k)^{15}\cdot(9,2-k)^{34}$.

Запишите в виде произведения двух степеней с одинаковыми основаниями степени

1) 9^{10}; 2) $\left(\frac{2}{3}\right)^{8}$; 3) $(81,4)^{[illegible]}$; 4) $\left(\frac{1}{11}\right)^{1[illegible]}$;

5) $(-20)^{[illegible]}$; 6) $\left(5\frac{1}{9}\right)^{10}$; 7) $(-0,09)^{[illegible]}$; 8) $\left(2\frac{5}{13}\right)^{28}$.

1) y^{11}; 2) $(-d)^{[illegible]}$; 3) $(8,5c)^{14}$; 4) $\left(3\frac{2}{3}x\right)^{13}$.

Вместо звездочки запишите число, чтобы были верными равенства.

1) $a^{24} = a^{10} \cdot a^{*}$; 2) $b^{[illegible]} = b^{*} \cdot b^{[illegible]}$;

3) $(-d)^{[illegible]} = (-d)^{[illegible]} \cdot (-d)^{*}$; 4) $(xy)^{9} = (xy)^{[illegible]} \cdot (xy)^{*}$;

5) $\left(\frac{k}{3}\right)^{20} = \left(\frac{k}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{k}{3}\right)^{*}$; 6) $(1,3t)^{*} : (1,3t)^{[illegible]} = (1,3t)^{[illegible]}$.

1) $x^{[illegible]} = x^{[illegible]} \cdot x^{*} \cdot x^{[illegible]}$; 2) $a^{*} \cdot a^{[illegible]} \cdot a^{[illegible]} = a^{[illegible]}$;

3) $(ab)^{*} \cdot (ab) \cdot (ab)^{[illegible]} = a^{[illegible]}$; 4) $\left(\frac{c}{4}\right)^{20} \cdot \left(\frac{c}{4}\right)^{[illegible]} = \left(\frac{c}{4}\right)^{[illegible]} \cdot \left(\frac{c}{4}\right)^{25}$;

5) $(-k)^{[illegible]} \cdot (-k)^{*} \cdot (-k)^{[illegible]} = (-k)^{[illegible]}$; 6) $\left(\frac{2}{5}y\right)^{6} \cdot \left(\frac{2}{5}y\right)^{[illegible]} = \left(\frac{2}{5}y\right)^{[illegible]} \cdot \left(\frac{2}{5}y\right)^{8}$.

Упростите выражения

1) $5^{[illegible]} \cdot 5^{[illegible]}$; 2) $6^{[illegible]} \cdot 6^{10}$; 3) $1,7^{[illegible]} \cdot 1,7^{[illegible]}$;

4) $(-4)^{[illegible]} \cdot (-4)^{[illegible]}$; 5) $\left(\frac{6}{13}\right)^{[illegible]} \cdot \left(\frac{6}{13}\right)^{6}$; 6) $(-5,2)^{[illegible]} \cdot (-5,2)^{[illegible]}$.

1) $8^{[illegible]} \cdot 8^{[illegible]}$; 2) $(-3)^{[illegible]} \cdot (-3)^{[illegible]}$; 3) $\left(\frac{8}{9}\right)^{[illegible]} \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^{[illegible]}$;

4) $\left(6\frac{2}{3}\right)^{[illegible]} \cdot \left(6\frac{2}{3}\right)^{[illegible]}$; 5) $(-4,1)^{[illegible]} \cdot (-4,1)^{[illegible]}$; 6) $3,7^{[illegible]} \cdot 3,7^{[illegible]}$.

Запишите в виде произведения трех степеней с одинаковыми основаниями степени

1) $15^{[illegible]}$; 2) $(-42)^{[illegible]}$; 3) $\left(\frac{9}{16}\right)^{20[illegible]}$; 4) $(-1,1)^{[illegible]}$.

1) $(-100)^{6k}$; 2) 99^{7k}; 3) $\left(8\frac{3}{5}\right)^{17k}$; 4) $7{,}7^{2k}$.

Представьте в виде произведения одинаковых множителей разными способами степень:

1) a^{3}; 2) $(-6)^{4}$; 3) $\left(\frac{5}{18}\right)^{5}$; 4) $(x+y)^{4}$.

Вместо звездочки запишите выражение, чтобы были верными равенства

1) $a^{k}\cdot a^{*}=a^{k+n}$; 2) $b^{*}\cdot b^{3n}=b^{n+3n}$;

3) $(cd)^{*}=(cd)^{2k}\cdot(cd)^{5}$; 4) $(5z)^{6}\cdot(5z)^{*}=(5z)^{6+3k}$.

1) $c^{k}\cdot c^{*}=c^{2k-1}$; 2) $d^{5k}\cdot d^{*}=d^{7k-2}$;

3) $z^{6k}\cdot z^{*}=z^{10k-10}$; 4) $m^{*}\cdot m^{18k}=m^{16k-13}$.

Докажите, что является верным равенство:

1) $x^{k-3n-9}\cdot x^{7+3n}\cdot x^{6-k}=x^{4}$;

2) $x^{5m-11}\cdot x^{20-4m-2n}\cdot x^{m+2n-30}=x^{2m-21}$.

Каким свойством обладает деление степеней с одинаковыми основаниями? Что такое *степень с нулевым показателем*?

Рассмотрите деление двух степеней с одинаковыми основаниями и натуральными показателями, *например*: $b^{15} : b^{9}$.

Как видим, при делении степеней с одинаковыми основаниями основание осталось тем же, а показатель оказался равным значению разности показателей степени числителя и знаменателя.

Убедимся, что справедливо свойство:

если b — любое рациональное число, не равное 0, и m и n — любые натуральные числа, такие, что $m > n$, то $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$.

Доказательство: $\frac{b^m}{b^n} = \frac{b^n \cdot b^{m-n}}{b^n} = b^{m-n}$, т. е. $b^m : b^n = b^{m-n}$ при $m > n$, $b \neq 0$.

Сформулируем доказанное свойство:

частное двух степеней с одинаковыми основаниями, не равными нулю, и натуральными показателями, такими, что показатель делимого больше показателя делителя, равно степени с тем же основанием и показателем, равным разности показателей степеней делимого и делителя.

При преобразовании частного двух степеней с одинаковыми основаниями, не равными нулю, и натуральными показателями, можно пользоваться правилом:

при преобразовании частного двух степеней с одинаковыми основаниями и показателями, такими, что показатель делимого больше показателя делителя, надо основание оставить тем же, а из показателя степени делимого вычесть показатель степени делителя.

Распространим правило деления степеней с одинаковыми основаниями для случая, когда показатели равны. Для этого разделим какую-нибудь степень саму на себя, *например*, a^n на a^n, так как делить на нуль нельзя, то $a \neq 0$. Тогда получим: $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$. Поскольку $\frac{a^n}{a^n} = 1$, то и $a^0 = 1$. Значит,

$a^0 = 1$ для любого числа, не равного нулю $(a \neq 0)$

Например, $10^0 = 1$; $5^0 = 1$; $28^0 = 1$; $(-16)^0 = 1$.

Представьте в виде степени выражения

1) $x^{10} : x^7$; 2) $y^{13} : y^8$; 3) $z^{11} : z^{10}$;

4) $35^{[illegible]} : 35^9$; 5) $(1,8)^{[illegible]} : (1,8)^9$; 6) $(0,8)^{[illegible]} : (0,8)^{21}$;

7) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{28} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{20}$; 8) $\left(-\frac{17}{20}\right)^{18} : \left(-\frac{17}{20}\right)^{26}$; 9) $\left(-5\frac{[illegible]}{18}\right)^{17} : \left(-5\frac{4}{13}\right)^{8}$.

1) $(-8)^{76}:(-8)^{30}$;

2) $\left(\frac{3}{14}\right)^{8}:\left(\frac{3}{14}\right)^{2}$;

3) $(4,1)^{81}:(4,1)^{72}$;

4) $\left(\frac{a}{3}\right)^{31}:\left(\frac{a}{3}\right)^{21}$;

5) $(-k)^{35}:(-k)^{31}$;

6) $(-6,8)^{18}:(-6,8)^{17}$.

1) $(9+x)^{6}:(9+x)^{4}$;

2) $(m-n)^{9}:(m-n)^{5}$;

3) $(2x-1)^{7}:(2x-1)^{4}$;

4) $\left(\frac{a}{5}-3\right)^{25}:\left(\frac{a}{5}-3\right)^{23}$;

5) $\left(4+\frac{b}{6}\right)^{10}:\left(4+\frac{b}{6}\right)^{7}$;

6) $(8,8-c)^{11}:(8,8-c)^{9}$.

Запишите в виде частного двух степеней с одинаковыми основаниями степени

1) 50^{27};

2) $\left(\frac{7}{3}\right)^{10}$;

3) $(-7,2)^{24}$;

4) $\left(-\frac{8}{9}\right)^{11}$.

1) y^{12};

2) $(-z)^{16}$;

3) $(-1,8d)^{11}$;

4) $\left(\frac{2}{11}c\right)^{17}$.

Вместо звёздочки запишите числа, чтобы были верными равенства:

1) $200^{10}=200^{21}:200^{*}$;

2) $4,45^{30}:4,45^{*}=4,45^{10}$;

3) $(-5ab)^{*}:(-5ab)^{*}=(-5ab)^{14}$;

4) $\left(\frac{5}{16}t\right)^{*}:\left(\frac{5}{16}t\right)^{2}=\left(\frac{5}{16}t\right)^{12}$.

1) $x^{60}=x^{80}:x^{15}:x^{*}$;

2) $a^{*}:a^{*}:a^{*}=a^{*}$;

3) $\left(-\frac{8}{15}k\right)^{28}=\left(-\frac{8}{15}k\right)^{36}:\left(-\frac{8}{15}k\right)^{*}:\left(-\frac{8}{15}\right)^{*}$;

4) $(1,1t)^{*}:(1,1t)^{*}:(1,1t)^{*}=1,1t$.

Вычислите: $4,5^{0}$; $\left(\frac{1}{5}\right)^{0}$; x^{0}; $(-2x+y)^{0}$; $(8,6a)^{0}$; $(-9,1bc)^{0}$.

Упростите выражение:

1) $a^{100}:a^{80}\cdot a^{5}$;

2) $b^{95}:b^{88}\cdot b^{15}$;

3) $(ax)^{11} \cdot (ax)^{12} : (ax)^{22}$; 4) $(3z)^{56} : (3z)^{51} \cdot (3z)$;

5) $\left(\frac{c}{5}\right)^{66} : \left(\frac{c}{5}\right)^{62} \cdot \left(\frac{c}{5}\right)^{3}$; 6) $(-kt)^{40} : (-kt)^{30} \cdot (-kt)^{10}$.

Вычислите:

1) $3^{25} : 3^{22} \cdot 3^{2}$; 2) $6^{20} \cdot 6^{18} : 6^{35}$;

3) $\left(\frac{5}{9}\right)^{40} : \left(\frac{5}{9}\right)^{36} \cdot \left(\frac{5}{9}\right)^{2}$; 4) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{50} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{49} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^{4}$;

5) $(1,1)^{[illegible]} \cdot (1,1) : (1,1)^{[illegible]}$; 6) $(-1,3)^{29} : (-1,3)^{28} \cdot (-1,3)$.

Найдите значение выражений:

1) $\frac{a^{20}}{a^{17}} - \frac{a^{20}}{a^{19}}$ при $a = 5$; $-\frac{3}{11}$; $2,8$; -40;

2) $\frac{b^{40}}{b^{37}} \cdot \frac{b^{10} \cdot b^{33}}{b^{40}}$ при $b = 8$; $-1,3$; $\frac{5}{3}$; -6.

При каком значении переменной x значение выражения равно 1:

1) $100^{34} : 100^{x} : 100^{x}$; 2) $(-40)^{50} : (-40)^{x} : (-40)^{21}$;

3) $\left(\frac{1}{6}\right)^{12} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{x} : \left(\frac{1}{6}\right)^{x}$; 4) $(-9,3)^{x} : (-9,3)^{24} : (-9,3)^{16}$?

Сравните значения выражений:

1) $4^{5} : 4^{[illegible]}$ и $2^{8} : 2^{6}$;

2) $(-9)^{10} : (-9)^{9}$ и $(-8)^{[illegible]} : (-8)^{8}$;

3) $10^{20} : 10^{19} \cdot 10^{2}$ и $2^{40} : 2^{37} \cdot 2^{2}$;

4) $\left(-\frac{1}{3}\right)^{60} : \left(-\frac{1}{3}\right)^{58}$ и $\left(-\frac{1}{2}\right)^{40} : \left(-\frac{1}{2}\right)^{36}$.

Упростите выражения:

1) $9^{[illegible]} : 9^{5}$; 2) $(-10)^{6} : (-10)^{[illegible]}$; 3) $3,7^{[illegible]} : 3,7^{11}$;

4) $\left(\frac{3}{16}\right)^{6} : \left(\frac{3}{16}\right)^{[illegible]}$; 5) $\left(8\frac{1}{4}\right) : \left(8\frac{1}{4}\right)^{[illegible]}$; 6) $(-2,4)^{[illegible]} : (-2,4)^{1}$.

1) $11^{k} : 11^{4} \cdot 11^{k+1}$;

2) $20^{10} : 20^{t} \cdot 20^{3+t}$;

3) $\left(\frac{1}{4}\right)^{3k} : \left(\frac{1}{4}\right)^{k} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^{2k+3}$;

4) $(-9)^{20t} : (-9)^{t+5} : (-9)$;

5) $\left(-\frac{1}{9}\right)^{5t-2} : \left(-\frac{1}{9}\right) \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)^{5t}$;

6) $2{,}1^{k+7} \cdot 2{,}1^{n} : 2{,}1^{n+k}$.

Вычислите:

1) $(2^{30} : 2^{15} : 2^{10}) \cdot (5^{27} : 5^{26} \cdot 5)$;

2) $(3^{13} : 3^{12} \cdot 3^{3}) : (7^{17} : 7^{15} : 7^{2})$;

3) $(4^{10} : 4^{8}) \cdot (6^{8} : 6^{6}) : (24^{37} : 24^{36})$;

4) $(9^{22} : 9^{20}) \cdot (8^{5} : 8^{3}) : (6^{18} : 6^{15})$.

Представьте в виде частного двух степеней с одинаковыми основаниями выражение:

1) a^{k-5};

2) d^{k+m};

3) b^{2k+1};

4) c^{4-5m}.

Вычислите:

1) $\dfrac{(-5)^{6} \cdot (-5)^{7} \cdot (-5)^{8}}{(-5)^{14} \cdot (-5)^{4}}$;

2) $\dfrac{1{,}2^{40} \cdot 1{,}2^{25} \cdot 1{,}2^{4}}{1{,}2^{59} \cdot 1{,}2^{8}}$;

3) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{20} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{30}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{34} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{23}}$;

4) $\dfrac{\left(-\frac{1}{6}\right)^{25} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{19} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{16}}{\left(-\frac{1}{6}\right)^{8} \cdot \left(-\frac{1}{6}\right)^{49}}$.

Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{(-6)^{19} \cdot (-6)^{33}}{3{,}2^{24} \cdot 3{,}2^{5}} \cdot \dfrac{3{,}2^{96} \cdot 3{,}2^{12}}{(-6)^{28} \cdot (-6)^{29}} \cdot \dfrac{(-6)^{6}}{3{,}2^{77}}$;

2) $\dfrac{1{,}7^{40} \cdot 1{,}7^{12} \cdot 20^{30}}{1{,}7^{39} \cdot 20^{6} \cdot 20^{7}} \cdot \dfrac{20^{7} \cdot 20^{8}}{1{,}7^{13} \cdot 1{,}7^{9}} \cdot \dfrac{1{,}7^{10}}{20^{31}}$.

Верно ли равенство:

1) $\dfrac{x^{100}}{x^{89}} \cdot \dfrac{x^{20} \cdot x^{60}}{x^{72}} = \dfrac{x^{55}}{x^{41}} \cdot \dfrac{x^{36}}{x^{13} \cdot x^{18}}$;

2) $\dfrac{x^{33} \cdot x \cdot x^{60}}{x^{47} \cdot x^{49}} = \dfrac{x^{58}}{x^{81}} \cdot \dfrac{x^{56} \cdot x^{60}}{x^{2} \cdot x^{79}}$;

3) $\dfrac{a^{17} \cdot a^{47} \cdot a^{56}}{a^{81} \cdot a^{39}} = \dfrac{a^{80} \cdot a^{5} \cdot a^{37}}{a^{59} \cdot a^{63}}$;

4) $\dfrac{a^{31} \cdot a^{18} \cdot a^{27} \cdot a^{19}}{a^{22} \cdot a^{54} \cdot a^{16}} = \dfrac{a^{39} \cdot a^{23}}{a^{59}}$?

Каким свойством обладает возведение степени в степень?

Выражение $(a^7)^5$ представлено в виде степени с основанием a^7 и показателем 5.

Как видим, при возведении степени в степень основание степени осталось прежним, а показатели степеней перемножили.

Убедимся, что справедливо свойство:

если a — любое число и m, n — целые неотрицательные числа, то $(a^m)^n = a^{mn}$

Действительно, по определению степени:

$$(a^m)^n = \underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}}.$$

Используя правило умножения степеней с одинаковыми основаниями, получим: $\underbrace{a^m \cdot a^m \cdot \ldots \cdot a^m}_{n \text{ раз}} = a^{\overbrace{m + m + \ldots + m}^{n \text{ раз}}}$.

Заменим сумму одинаковых слагаемых $\underbrace{m + m + \ldots + m}_{n \text{ раз}}$ произведением mn.

Получим: $a^{\overbrace{m + m + \ldots + m}^{n \text{ раз}}} = a^{mn}$.

При возведении степени в степень можно использовать правило:

чтобы возвести степень в степень, надо основание степени оставить прежним, а показатели перемножить.

Запишите в виде степени с основанием b выражения

1) (b); 2) (b); 3) (b); 4) (b).

1) $(b)\cdot b$; 2) $b\cdot(b^{3})$; 3) $b\cdot(b)$;

4) $b\cdot(b)$; 5) $(b)\cdot b$; 6) $(b)\cdot b$;

7) $(b)^{10} : b$; 8) $b : (b)$; 9) $(b)\cdot b$;

10) $b : (b)$; 11) $(b) : b$; 12) $b : (b)$.

Упростите

1) $(a^{1})\cdot(a)$; 2) $(b\,b)$; 3) $(c) : (c)$;

4) $(6l\,d)$; 5) $(c) : (c)$; 6) (kk).

1) $(b)\cdot(b)$; 2) $(b) : (b)$; 3) $(b) : (b)^{10}$;

4) $(b) : (b)$; 5) $(b)\cdot(b)$; 6) $(b) : (b)$.

Представьте в виде квадрата выражения степень:

1) a; 2) x; 3) y; 4) z.

Представьте в виде куба выражения степень:

1) a; 2) x; 3) y; 4) z.

Вычислите:

1) (5) 600; 2) (5) 271; 3) 1000 $5\cdot(2)$;

4) $\frac{1}{2}$ 320; 5) (2) 200; 6) $\frac{2}{3}$ $\frac{3645}{32}$.

Найдите значение выражения:

1) $(b)\cdot(b) : (b^{6})$ при $b = 2$; 2) $(a)\cdot(a^{10}) : (a)$ при $a = \frac{3}{7}$.

Доказките тождество:

1) $(a)\cdot(a) : (a) = a$; 2) $(x)\cdot(x) = x$.

Упростите:

1) $\frac{(125 t)}{25 t}$; 2) $\frac{45 x y^{9}}{27 x^{12} (y)}$; 3) $\frac{32 c\,(d)}{24 c\,d}$.

Вычислите:

1) $\dfrac{(13^5)^{11}\cdot(13^4)^{10}}{(13^{17})^2}$; 2) $\dfrac{(7^5)^6\cdot 7^{27}}{(7^{11})^5}$; 3) $\dfrac{(6^8)^9\cdot(6^4)^5}{(6^{24})^3\cdot(6^3)^6}$;

4) $\dfrac{(19^{11})^7\cdot(19^7)^2}{(19^{20})^3\cdot 19^{29}}$; 5) $\dfrac{(3^{15})^5\cdot(3^{12})^2}{(3^2)^{25}\cdot(3^3)^{16}}$; 6) $\dfrac{(2^{10})^8\cdot(2^{12})^5}{(2^{45})^2\cdot(2^{11})^4}$.

Найдите значение выражения:

1) $(y^4)^5 : (y^9)^2\cdot y^3$ при $y=-1$; 2) $(z^3)^9 : (z^4)^6\cdot z$ при $z=-2$.

Докажите тождество:

1) $(a^{22})^5 : (2a^{35}) - 1{,}5a^{75} = -a^{75}$; 2) $(y^{\text{[illegible]}})^6 : (5y^{\text{[illegible]}})^2 + 0{,}96y^{\text{[illegible]}} = y^{\text{[illegible]}}$.

Каким свойством обладает возведение произведения и частного в степень?

Как видим, при возведении произведения в степень сначала возвели в эту степень каждый из множителей, затем полученные степени перемножили.

Убедимся в справедливости свойства:

если a и b — любые рациональные числа, а m — натуральное число, то $(ab)^m = a^m b^m$.

Действительно, $(ab)^m = \underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot ... \cdot (ab)}_{m}$.

Поскольку множители можно менять местами, то получим:

$$\underbrace{(ab) \cdot (ab) \cdot ... \cdot (ab)}_{m} = \underbrace{aa \cdot ... \cdot a}_{m \text{ раз}} \cdot \underbrace{bb \cdot ... \cdot b}_{m \text{ раз}} = a^m \cdot b^m.$$

При возведении произведения в степень можно использовать правило:

чтобы произведение возвести в степень, надо возвести в эту степень каждый множитель и полученные результаты перемножить.

Например, $(2 \cdot 10)^4 = 2^4 \cdot 10^4 = 16 \cdot 10\,000 = 160\,000$.

Рассмотрите возведение частного (дроби) в степень на примере $\left(\frac{2}{3}\right)^4$.

По определению степени с натуральным показателем получим: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$. По правилу умножения дробей получим: $\frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot$

$\times \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}$. Заменим произведения одинаковых множителей степенями. Получим: $\frac{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3} = \frac{2^4}{3^4}$. Таким образом, $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$.

Как видим, при возведении в степень дробь возвели в эту степень отдельно числитель и отдельно знаменатель, первый результат записывают в числитель, второй — в знаменатель.

Убедимся в справедливости свойства:

если a — целое число, b и n — натуральные числа, то $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$

Действительно, по определению степени с натуральным показателем имеем:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ раз}} = \frac{\overbrace{aa \ldots a}^{n \text{ раз}}}{\underbrace{bb \ldots b}_{n \text{ раз}}} = \frac{a^n}{b^n}.$$

При возведении дроби в степень можно воспользоваться правилом:

чтобы возвести дробь в степень, надо возвести в эту степень отдельно ее числитель и знаменатель.

Например, $\left(-\frac{2}{k}\right)^6 = \left(\frac{2}{k}\right)^6 = \frac{2^6}{k^6} = \frac{64}{k^6}$.

Представьте в виде произведения степеней степень:

1) $(ax)^7$;   2) $(yz)^{10}$;   3) $(nm)^{15}$;   4) $(cd)^{30}$.

1) $(2a)^{20}$;   2) $(1{,}5b)^6$;   3) $(\frac{2}{17}c)^7$;   4) $(-4d)^{12}$.

Представьте в виде частного степеней степени

1) $\left(\frac{a}{y}\right)^{8}$;   2) $\left(\frac{n}{m}\right)^{10}$;   3) $\left(\frac{k}{c}\right)^{19}$;   4) $\left(\frac{d}{x}\right)^{31}$.

1) $\left(\frac{2}{b}\right)^{5}$;   2) $\left(\frac{d}{7}\right)^{4}$;   3) $\left(\frac{5}{a}\right)^{11}$;   4) $\left(\frac{6}{n}\right)^{8}$.

Запишите в виде степени выражение:

1) $2^{[illegible]}\cdot a^{[illegible]}$;   2) $5^{5}\cdot b^{5}$;   3) $\left(\frac{1}{3}\right)^{7}c^{7}$;   4) $\left(\frac{2}{15}\right)^{10}d^{10}$.

5) $4^{6}a^{6}b^{6}$;   6) $8^{9}c^{9}d^{9}$;   7) $\left(\frac{4}{11}\right)^{11}n^{11}m^{11}$;   8) $x^{13}y^{13}z^{13}$.

Запишите в виде степени дробь:

1) $\frac{t^{10}}{x^{10}}$;   2) $\frac{[illegible]^{15}}{y^{15}}$;   3) $\frac{z^{21}}{6^{21}}$;   4) $\frac{t^{39}}{9^{39}}$.

Упростите

1) $\frac{(a-b)^{8}}{a^{5}}$;   2) $\left(\frac{x}{y}\right)^{5}\cdot y^{7}$;   3) $\frac{(d-t)^{9}}{d^{7}}$;

4) $\frac{(x-p)^{7}}{p^{5}}$;   5) $\frac{(a-c)^{10}}{c^{8}}$;   6) $m^{10}\cdot\left(\frac{n}{m}\right)^{10}$.

1) $\frac{\left(x^{5}y^{6}\right)^{4}}{x^{20}y^{22}}$;   2) $\left(\frac{a^{4}}{b^{3}}\right)^{5}\cdot b^{17}$;   3) $\frac{\left(x^{8}y^{4}\right)^{3}}{x^{25}y^{12}}$;

4) $\frac{a^{21}b^{34}}{\left(a^{10}b^{17}\right)^{2}}$;   5) $y^{20}\cdot\left(\frac{x^{2}}{y^{5}}\right)^{4}$;   6) $\frac{z^{19}t^{41}}{\left(z^{6}t^{13}\right)^{3}}$.

Найдите значение выражения:

1) $(a^{4}b^{5})^{2}:(a^{2}b^{4})^{3}$ при $a=-0{,}5$, $b=2$;

2) $(x^{7}y^{4})^{3}:(x^{10}y^{6})^{2}$ при $x=-3$, $y=\frac{2}{3}$;

3) $(-2a^{6}b^{5})^{3} : (5a^{7}b^{4})^{2}$ при $a = \frac{7}{8}$, $b = -\frac{3}{25}$;

4) $(3a^{2}b^{3})^{5} : (-4a^{3}b)^{3}$ при $a = -\frac{5}{9}$, $b = -16$.

Докажите тождество:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^{5} \cdot (2^{5})^{4} \cdot 3^{7} : (2^{10} \cdot 3)^{2} = 1$; 2) $(7^{2})^{8} \cdot (6^{3})^{4} : (7^{4} \cdot 6^{3})^{4} = 1$;

3) $\left(\frac{4}{5}\right)^{6} \cdot (4^{3})^{3} \cdot 5^{8} : (4^{7} \cdot 5)^{2} = 4$; 4) $(9^{4} \cdot 8^{3})^{5} : (9^{10})^{2} : (8^{2})^{7} = 8$.

Упростите выражения

1) $(2x^{5}y^{7})^{3} : (x^{12}y^{20}) - (3xy^{4})^{3} : (x^{2}y^{11})$;

2) $(-3a^{4}b^{5})^{2} \cdot (-2a^{2}b^{3})^{5} : (-72a^{9}b^{9})^{2} + a^{2}b$;

3) $(5x^{6}y^{2})^{3} \cdot (-x^{5}y^{7})^{2} : (-0{,}2x^{12}y^{10})^{2} - 10x^{4}$;

4) $(-2a^{10}b^{20})^{2} : (-a^{2}b^{8})^{2} : (-2a^{5}b^{21})^{2}$.

1) $(x^{11}y^{12}z^{15})^{2} : (x^{2}yz^{2})^{9} \cdot (xyz^{4})^{2}$; 2) $\left(\frac{x}{y}\right)^{5} \cdot \left(\frac{x^{4}}{y^{8}}\right)^{3} : \left(\frac{x^{8}}{y^{10}}\right)^{2} : \left(\frac{x}{y}\right)^{5}$.

Найдите значение выражения:

1) $(a^{3}b^{5})^{?} : (a^{7}b^{11})^{2} \cdot (ab)^{4}$ при $a = -2$, $b = \frac{1}{2}$;

2) $\left(\frac{a^{4}}{b^{5}}\right)^{2} \cdot \left(\frac{b^{6}}{a^{5}}\right)^{2} : (ab)$ при $a = -\frac{1}{3}$, $b = -3$.

Упростите выражение:

1) $(4^{n}3^{n})^{?} : (4^{n-1}3^{n-1})^{?}$; 2) $(7^{n}9^{n})^{3} : (7^{n-2}9^{n})^{3}$;

3) $(11^{n}5^{n})^{?} : (11^{n}5^{n-1})^{?}$; 4) $(13^{n}6^{n})^{?} : (13^{n}6^{n-1})^{?}$.

Вычислите:

1) $(100^{10} \cdot 9^{5})^{7} \cdot (100^{20} \cdot 9^{6})^{2} : (100^{109} \cdot 9^{33})$;

2) $(0{,}15^{?} \cdot 3^{?})^{?} \cdot (3^{?} \cdot 0{,}15^{?})^{?} : (3^{?} \cdot 0{,}15^{?})^{?}$;

3) $\left(\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^6\right)^{10} : \left(\left(\frac{4}{5}\right)^{12} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^6\right)^5$;

4) $\left(\left(\frac{5}{6}\right)^7 \cdot \left(\frac{6}{7}\right)^3\right)^8 : \left(\left(\frac{6}{7}\right)^{11} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{27}\right)^2$.

Докажите, что значение выражения равно нулю:

1) $((a^2)^3)^5 \cdot (a^{15}b)^2 : a^{60} - b^2$; 2) $(x^5y)^3 \cdot ((y^4)^3)^4 : y^{51} - x^{15}$.

Докажите тождество:

1) $\left(\frac{2}{3}\right)^8 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{5}{2}\right)^{10} = 3{,}75$; 2) $(4 \cdot 7)^{10} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^{10} : (7^5 \cdot 3^4)^2 = 9$.

Представьте число: 1) 64; 2) 729 в виде степени:

а) с отрицательным основанием; б) с нечетным показателем.

Как изменится число, если показатель степени числа 10 увеличить на 1; уменьшить на 1? Как записать очень маленькие числа?

Если показатель степени 10 увеличить на 1, то значение степени увеличится в 10 раз, если уменьшить на 1, то значение степени уменьшится в 10 раз.

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, если $a \neq 0$ и n — натуральное число.

Рассмотрите примеры: $12^{-2} = \frac{1}{12^2} = \frac{1}{144}$;

$(-7)^{-3} = \frac{1}{(-7)^3} = \frac{1}{-343} = -\frac{1}{343}$;

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-4} = \frac{1}{\left(-\frac{1}{3}\right)^4} = \frac{1}{\frac{1}{81}} = 81.$

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$ запись называют *заменой дробью степень с целым отрицательным показателем.*

Замените дробью степень с целым отрицательным показателем:

1) 7^{-3}; 2) 13^{-2}; 3) 11^{-1}; 4) 12^{-3}; 5) 16^{-3}; 6) 25^{-4}.

Замените степенью с целым отрицательным показателем дробь:

1) $\frac{1}{81}$; 2) $\frac{1}{64}$; 3) $\frac{1}{121}$;

4) $\frac{1}{625}$; 5) $\frac{1}{841}$; 6) $\frac{1}{256}$.

Представьте числа 5; 25; 125; 625; $\frac{1}{5}$; $\frac{1}{25}$; $\frac{1}{125}$; $\frac{1}{625}$.

1) в виде степени с основанием 5;

2) в виде степени с основанием $\frac{1}{5}$.

Вычислите:

1) 2^{-3}; 2) $(-3)^{-3}$; 3) $(-1)^{-2}$;

4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3}$; 5) $0{,}02^{-2}$; 6) $1{,}25^{-1}$;

7) -4^{-2}; 8) $(-0{,}3)^{-3}$; 9) $\left(-2\frac{1}{2}\right)^{-3}$;

10) $(-2{,}25)^{-1}$; 11) $-(-2{,}3)^{-1}$; 12) $\left(-2\frac{1}{3}\right)^{-2}$.

Замените дробью степень с целым отрицательным показателем:

1) $(25)^{-1}$; 2) $(0{,}125)^{-2}$; 3) $(-2{,}5)^{-2}$;

4) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-1}$; 5) $\left(2\frac{1}{3}\right)^{-3}$; 6) $\left(-\frac{2}{7}\right)^{-2}$.

Вычислите:

1) $3\cdot 12^{-2}$; 2) $2^{-2}-6^{-1}$; 3) $3^{-2}-(-3)^{-1}$;

4) $-2\cdot 4^{-2}$; 5) $3\cdot 4^{0}-2^{-3}$; 6) $0{,}1^{0}-(-0{,}25)^{-2}$;

7) $(-2{,}5)^{-1}+\left(-\frac{2}{5}\right)^{-1}$; 8) $(-3)^{-1}\cdot 3{,}5^{-1}$;

9) $-4^{-1}\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)^{-2}$; 10) $-3{,}5^{-1}\cdot(-2{,}5)^{-2}$;

11) $3\cdot(-4)^{-2}+5^{-1}$; 12) $(-2{,}7)^{0}+\left(\frac{1}{7}\right)^{-1}$.

Представьте в виде дроби выражение:

1) $a^{-1}-b^{-1}$; 2) $ab^{-1}-a^{-1}b$; 3) $(x+y^{-1})(x^{-1}+y)$.

Представьте дробь в виде степени с целым показателем:

1) $\frac{2ab^2}{c^2x^3}$; 2) $\frac{54x^3y^2}{2a^5b^4}$; 3) $-\frac{4}{(x-y)^3}$; 4) $\frac{(a-b)^5}{(a-b)^7}$.

Какими свойствами обладают степени с целым показателем?

Вам известны свойства степени с натуральным показателем: для любых чисел $a \neq 0$, $b \neq 0$ и любых натуральных чисел n и m верны равенства:

$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; $a^n : a^m = a^{n-m}$ при $n > m$; $(a^m)^n = a^{mn}$; $(ab)^n = a^n b^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

Докажем, что все эти свойства выполняются, когда показателями являются любые целые числа.

Для любых целых чисел m и n и $a \neq 0$ верны равенства:

1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$; 2) $a^n : a^m = a^{n-m}$; 3) $(a^m)^n = a^{mn}$;

4) $(ab)^n = a^n b^n$; 5) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$.

Доказательство.

Докажем равенство: 1) $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$.

а) Рассмотрим случай, когда один показатель степени числа a число положительное, другой — отрицательное; например, $m > 0$, $n < 0$.

Поскольку свойства степеней были доказаны для степеней с натуральными показателями, то выразим целые числа m и n через натуральные числа. Для этого обозначим $m = k$, $n = -p$, где k и p — натуральные числа. Тогда:

$a^m \cdot a^n = a^k \cdot a^{-p}$ — использовали введенные обозначения;

$a^k \cdot a^{-p} = a^k \cdot \frac{1}{a^p}$ — преобразовали второй множитель по определению степени с отрицательным целым показателем;

$a^k \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{a^k}{a^p}$ — использовали правило умножения на дробь.

Здесь возможны случаи: $k > p$, $k < p$ и $k = p$.

Если $k > p$, то $\frac{a^k}{a^p} = a^{k-p}$ — по свойству степеней с натуральным показателем: $a^n : a^m = a^{n-m}$ при $n > m$.

Если $k < p$, то $\frac{a^k}{a^p} = \frac{1}{a^{p-k}}$ – сократили дробь на общий множитель a^k;

$\frac{1}{a^{p-k}} = a^{-(p-k)}$ – по определению степени с отрицательным показателем;

Если $k = p$, то $\frac{a^k}{a^p} = 1 = a^0 = a^{k-p}$, так как $a \neq 0$ и $a^k = a^p$, $a^0 = 1$.

$a^{k-p} = a^{k+(-p)}$ – записали выражение в показателе степени в виде алгебраической суммы;

$a^{k+(-p)} = a^{m+n}$ – использовали введенные обозначения: $m = k, n = -p$.

Все проведенные выше преобразования можно записать так:

$$a^m \cdot a^n = a^k \cdot a^{-p} = a^k \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{a^k}{a^p} = a^{k-p} = a^{k+(-p)} = a^{m+n}.$$

б) Рассмотрим случай, когда оба показателя степеней числа a целые отрицательные числа, т. е. $m < 0$, $n < 0$.

Поскольку свойства степеней были доказаны для степеней с натуральными показателями, то выразим целые числа m и n через натуральные числа. Для этого обозначим $m = -k$, $n = -p$, где k и p — натуральные числа. Тогда:

$a^m \cdot a^n = a^{-k} \cdot a^{-p}$ – использовали введенные обозначения: $m = -k$, $n = -p$;

$a^{-k} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p}$ — по определению степени с отрицательным целым показателем;

$\frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^k \cdot a^p}$ — по правилу умножения дробей;

$\frac{1}{a^k \cdot a^p} = \frac{1}{a^{k+p}}$ — по свойству степеней с натуральными показателями;

$\frac{1}{a^{k+p}} = a^{-(k+p)}$ — по определению степени с отрицательным целым показателем;

$a^{-(k+p)} = a^{-k-p}$ — по правилу раскрытия скобок, перед которыми стоит знак "–";

$a^{-k-p} = a^{-k+(-p)}$ — записали выражение в показателе степени в виде алгебраической суммы;

$a^{-k+(-p)} = a^{m+n}$ — использовали введенные обозначения: $m = -k$, $n = -p$.

Все проведенные выше преобразования можно записать так:

$$a^m \cdot a^n = a^{-k} \cdot a^{-p} = \frac{1}{a^k} \cdot \frac{1}{a^p} = \frac{1}{a^{k+p}} = a^{-(k+p)} = a^{-k-p} = a^{-k+(-p)} = a^{m+n}.$$

Докажите свойство $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ при $m = 0$ или $n = 0$.

Чтобы умножить степени с целыми показателями и одинаковыми основаниями, отличными от нуля, надо основание оставить прежним, а показатели степеней сложить.

Докажите свойства 2—5 (с. 55).

Из свойств следует, что действия над степенями с целыми показателями выполняются по тем же правилам, что и действия над степенями с натуральными показателями.

Пример 1. Упростим произведение $b^{19} \cdot b^{-13}$, где $b \neq 0$.

Решение.

$b^{19} \cdot b^{-13} = b^{19+(-13)}$ — по правилу: при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежнее, а показатели степеней складывают;

$b^{19+(-13)} = b^{19-13}$ — по правилу раскрытия скобок, перед которыми стоит знак "+".

$b^{19-13} = b^6$.

Ответ: b^6.

Пример 2. Упростим частное $c^7 : c^{11}$, где $c \neq 0$.

Решение.

$c^7 : c^{11} = c^{7-11} = c^{-4}$ — по правилу: при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя степени делимого вычитают показатель степени делителя.

Ответ: c^{-4}.

Пример 3. Упростим выражение $(-3x^{-4}y^{2})^{-5}$.

Решение.

$(-3x^{-4}y^{2})^{-5} = (-3)^{-5}(x^{-4})^{-5}(y^{2})^{-5}$ — по правилу: при возведении в степень произведения возводят в эту степень каждый множитель и результаты перемножают.

$(-3)^{-5}(x^{-4})^{-5}(y^{2})^{-5} = -\frac{1}{243}x^{20}y^{-10}$ — по правилу: при возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели перемножают.

Ответ: $-\frac{1}{243}x^{20}y^{-10}$.

Используя свойства степени с целым показателем, упростите выражение:

1) $2a^{-2}\cdot 3a^{1}$;
2) $24a^{5}:(6a^{-4})$;
3) $(2c^{-3})^{2}$;
4) $2(3^{-2}b^{3})^{2}3b^{-1}$.

Представьте в виде степени с целым показателем выражение:

1) $125\cdot 5^{-4}$;
2) $27\cdot\frac{1}{9}\cdot 3^{-1}:3^{-2}$;
3) $\frac{1}{32}\cdot 2^{7}:64$;
4) $100^{2}\cdot 10^{-3}$.

Вычислите:

1) $64^{-1}\cdot 32^{2}$;
2) $(6^{3})^{-2}:36^{-3}$;
3) [illegible];
4) [illegible].

Найдите значение выражения:

1) $10^{-2}\cdot 0{,}001$;
2) $13^{0}\cdot(13^{-2}):13^{-4}$;
3) $\frac{(3^{-2})^{-2}\cdot 9^{-1}}{27}$;
4) $\frac{25^{-2}\cdot 125}{5^{-3}}$.

Представьте в виде степени и найдите значение выражения:

1) $5(5a^{-3})^{-2}a^{-2}$ при $a = (0,2)^{-1}$;

2) $(0,5a^{-2})^{-2} : (32a^{3})^{2}$ при $a = (0,5)^{-1}$;

3) $(2^{3}a^{-1})^{-1} \cdot 64a^{-4} : a^{-5}$ при $a = -0,125$;

4) $27(-3^{2}a^{3}) : (3^{3}a^{-1})^{2}$ при $a = -0,1$.

Решите уравнение:

1) $2^{-2} + 3^{-1}x = 0,25$;

2) $3^{-1}x + 3^{-2}x = 9^{-2} + x$;

3) $2,25x = 5,125 - 4^{-1}x$;

4) $4^{-1}x - 2^{-2}x = 8^{2} + x$.

Решите неравенство:

1) $7^{-1}x - 2^{-2}x \geqslant 2\frac{4}{7}$;

2) $3,125 + x \leqslant 5,125 - 4^{-1}x$;

3) $7,25 + 2x > 5,125 - 5^{-1}x$;

4) $12,5x - 5,125 < 2^{-3} - 4^{-1}x$.

Докажите тождество:

1) $27^{-1}81^{2}(3^{-2})^{4} : 81^{-3} = 9^{4}$;

2) $7^{-2}21^{4}(6^{-3})^{2} : 14^{-3} : 343 = 2^{-3}9^{-2}$;

3) $4^{-1}8^{2}(a^{-4})^{4} : (8a^{-5})^{2} = 0,25a^{-4}$;

4) $a^{-1}(ab)^{2}(b^{-3})^{3} : b^{-8} = ab^{-1}$.

Сравните значения выражений

1) $128^{-2} \cdot 32^{3}$ и $(6^{2})^{2} : 36^{2}$;

2) $\dfrac{8^{-3} \cdot 2^{5}}{16^{-2}}$ и $\dfrac{(3^{-2})^{3} \cdot 9^{7} \cdot 2^{-2}}{81^{2}}$.

1) $13^{0} \cdot 3^{-2} : 2^{2}$ и $10^{2} \cdot 5^{-2} : 2^{3}$;

2) $\dfrac{14^{0} \cdot 3^{2} : 4^{-2}}{2 \cdot 3^{3}}$ и $\dfrac{21^{3} \cdot 9^{-2}}{7^{3}}$.

Представьте в виде степени и найдите значение выражения:

1) $125(5a^{-2}b^{3})^{-2}a^{-2}b^{4}$ при $a = 0,2$, $b = 0,5$;

2) $(0,5a^{-2})^{-2} : (32a^{3}b^{2})^{2}$ при $a = (0,5)^{-1}$, $b = 0,25$;

3) $(2^{3}a^{-1}b)^{-1} \cdot 64a^{-4} : a^{-5}$ при $a = -0,125$, $b = 0,5$;

4) $27(-3^{2}a^{3}) : (3^{3}a^{-1}b^{-2})^{2}$ при $a = -0,1$, $b = 0,1$.

Решите уравнение:

1) $7^{-2}x - 21 = 3^{-1}$;

2) $0,01 \cdot 10^{2}x + 5^{2} - x = 2 \cdot 5^{2}$;

3) $\dfrac{3 \cdot 3^{-2}}{6^{-2}}x = 2^{4} \cdot 3$;

4) $\dfrac{5^{3} \cdot 3^{3}}{12^{0} \cdot 15^{3}} - \dfrac{1}{2}x = 10^{-1}$.

Найдите наименьшее целое число, которое удовлетворяет неравенству:

1) $8^{-2}x > 24,75 + 4^{-1}$; 2) $6^{2} - x \geqslant -4^{2} \cdot x + 5^{-1}$;

3) $3^{-1}x > 15^{-1} - 2x$.

Найдите наибольшее целое число, которое удовлетворяет неравенству:

1) $4^{-2}x < 12,75 - 4^{-1}$; 2) $12^{2} + 3^{4}x \leqslant 8^{2} \cdot x + 6^{-1}$;

3) $4^{-1}x < 13^{0} - 12^{-1} - 3x$.

Докажите тождеств :

1) $(0,25a^{-2})^{2} \cdot 4^{3}a^{3} = 2^{2}a^{-1}$; 2) $\frac{2^{0} : 4}{14^{0} \cdot a^{-2}} \cdot a = \frac{2}{a^{-3}}$;

3) $\frac{2^{3} : 8}{24^{0} \cdot a^{-2}} \cdot a^{2} = a^{4}$.

1) $\left(\frac{8x^{-2}}{y^{-3}}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{2^{-1}}{x^{-2}y^{2}}\right)^{3} = 0,125y^{3}$; 2) $\frac{3^{2} : 27}{17^{0} \cdot a^{-2}} \cdot a^{3} = \frac{a^{2}}{a^{-3}}$;

3) $\frac{5^{2} : 75}{19^{0} \cdot b^{-2}} \cdot b = \frac{5}{5b^{-3}}$.

Что такое *стандартный вид числа* и для чего надо записывать числа в стандартном виде?

Как записать очень большие, *например* расстояние от Земли до Солнца, и очень маленькие числа, *например* массу атома водорода, энергию распада ядра урана и другие так, чтобы было удобно читать, записывать и выполнять действия с этими числами?

Запись числа в стандартном виде используют, чтобы было удобнее, чем в обычном десятичном виде, читать, записывать и выполнять над очень большими и очень маленькими числами какие-либо действия.

Стандартным видом числа называется его запись в виде $a \cdot 10^n$, где $1 \leqslant a < 10$ и n — целое число.

Число n называется *порядком числа*.

Например, в стандартном виде расстояние от Солнца до Земли примерно равно $1,5 \cdot 10^8$ км, энергия сильного землетрясения равна $6 \cdot 10^{18}$ Дж, энергия старта космического корабля записывается $9 \cdot 10^{11}$ Дж, диаметр молекулы ДНК — $2 \cdot 10^{-9}$ м. В этих записях порядок числа, выражающего энергию старта космического корабля в джоулях, равен 11, а порядок числа, выражающего длину диаметра молекулы ДНК в метрах, равен -9.

Порядок числа дает представление о том, насколько велико или мало это число. *Например*, если порядок числа a равен 3, то это означает, что $1000 \leqslant a < 10\,000$. Если порядок числа a равен -2, то $0,01 \leqslant a < 0,1$.

Большой положительный порядок показывает, что число очень велико. Большой по модулю отрицательный порядок показывает, что число очень мало.

Пример 1. Используя запись в стандартном виде, запишем длину диаметра Солнца, которая равна 1 300 000 км.

Решение.

1, 300 000	в числе 1 300 000 поставили запятую так, что в целой части оказалась одна цифра;

$1,300\,000 = 1,3$ — по свойству десятичных дробей;

$1\,300\,000 = 1,3 \cdot 10^6$ — так как, отделив запятой 6 цифр справа, уменьшили число 1 300 000 в 10^6 раз, значит, число 1 300 000 больше числа 1,3 в 10^6 раз.

Ответ: $1,3 \cdot 10^6$ км.

Пример 2. Используя запись в стандартном виде, запишем длину диаметра атомного ядра, которая равна 0,000 000 000 000 005 м.

Решение.

$5,000\,000\,000\,000\,000$ — в числе 0,000 000 000 000 005 переставили запятую так, что в целой части оказалась одна, отличная от нуля, цифра;

$5,000\,000\,000\,000\,000 = 5$ — по свойству десятичных дробей;

$0,000\,000\,000\,000\,005 = 5 \cdot 10^{-15}$ — так как, переставив запятую на 15 знаков вправо, увеличили число 0,000 000 000 000 005 в 10^{15} раз, значит, число 0,000 000 000 000 005 меньше числа 5 в 10^{15} раз, т. е. $0,000\,000\,000\,000\,005 = 5 : 10^{15} = 5 \cdot \frac{1}{10^{15}} = 5 \cdot 10^{-15}$.

Ответ: $5 \cdot 10^{-15}$ м.

Как [illegible] приближенные [illegible] виде?

[illegible] абсолютная [illegible] и относительная погрешности приближенных [illegible]

Человек в своей практической деятельности часто использует не точные значения величин, а их приближенные значения.

Например, длину комнаты (земельного участка, дороги и т. п.) не измеряют с точностью до миллиметра; массу различных товаров (конфет, муки, сахара и др.) не измеряют с точностью до миллиграмма (1 мг $= 10^{-3}$ г) и др.

Если, *например*, при измерении длины участка получили 300 м 1 см, а его ширины — 199 м 99 см, то за приближенное значение длины принимают 300 м, а ширины — 200 м.

Расхождение точного и приближенного значения в каждом из этих случаев составляет 1 см: в первом случае это расхождение выражается положительной величиной: 300 м 1 см − 300 м = 1 см, во втором — отрицательной величиной: 199 м 99 см − 200 м = −1 см.

На практике важно не расхождение точного и приближенного значения величины в сторону уменьшения или увеличения, а числовое значение этого расхождения. Поэтому рассматривают не саму разность величин, а модуль этой разности.

Модуль разности точного и приближенного значений величины *называется абсолютной погрешностью приближения.*

Пусть дана величина (число) x, обозначим ее (его) приближенное значение через x_1.

Модуль (абсолютное значение) разности величины (числа) x и ее (его) приближенного значения x_1 называется *абсолютной погрешностью приближенного значения* x_1.

Абсолютную погрешность приближенного значения обозначим символом Δ (*дельта*), тогда $\Delta = |x - x_1|$.

Пример 1. Найдем абсолютную погрешность приближенного значения, если при вычислении дробь $\frac{3}{7}$ заменили десятичной дробью 0,42.

Решение.

$\Delta = \left|\frac{3}{7} - 0{,}42\right| = \left|\frac{3}{7} - \frac{42}{100}\right|$ – записали десятичную дробь 0,42 в виде обыкновенной дроби $\frac{42}{100}$;

$\left|\frac{3}{7} - \frac{42}{100}\right| = \left|\frac{3}{7} - \frac{21}{50}\right|$ – сократили дробь $\frac{42}{100}$ на 2;

$\left|\frac{3}{7} - \frac{21}{50}\right| = \left|\frac{150 - 147}{350}\right|$ – привели дроби к общему знаменателю;

$\left|\frac{150 - 147}{350}\right| = \left|\frac{3}{350}\right| = \frac{3}{350}$ – нашли значение числителя и раскрыли знак модуля.

Ответ: $\frac{3}{350}$.

В общем случае считают, что приближенное значение числа x равно x_1 и абсолютная погрешность этого приближенного значения не превосходит (меньше или равна) некоторого числа h.

Если $|x - x_1| \le h$, то число x_1 называется *приближенным значением числа x с точностью до h*.

Если x_1 приближенное значение числа x с точностью до h, то пишут $x = x_1 \pm h$.

Из $|x - x_1| \le h$ следует двойное неравенство $-h \le x - x_1 \le h$.

Пример 2. Найдем приближенные значения числа x с недостатком и с избытком, если $x = 1,4 \pm 0,05$.

Решение. Запись $x = 1,4 \pm 0,05$ означает, что приближенное значение числа x равно 1,4 с точностью до 0,05. Поэтому $1,4 - 0,05 \le x \le 1,4 + 0,05$ или $1,35 \le x \le 1,45$, тогда числа 1,35 и 1,45 являются приближенными значениями числа x с недостатком и избытком.

Ответ: 1,35 и 1,45.

При решении многих математических, физических, технических задач, при выполнении действий над различными приближенными значениями используют округление чисел. *Например*, постоянное число, показывающее отношение длины окружности к ее диаметру, равно $\pi = 3,141592652...$ Обычно это число округляют до сотых долей, т. е. $\pi \approx 3,14$.

Эта запись означает, что 3,14 является приближенным значением π. Такое округление вполне подходит для практических вычислений.

Если a является приближенным значением величины x, записывают $x \approx a$ и читают: x приближенно равно a.

Округлим, *например*, число 5,748 до сотых долей.

Ясно, что при округлении с недостатком получим приближенное значение 5,74, при округлении с избытком – 5,75.

Найдем абсолютную погрешность округления с недостатком и с избытком. Получим соответственно:

$|5,748 - 5,74| = |0,008| = 0,008$ и $|5,748 - 5,75| = |-0,002| = 0,002$.

Абсолютная погрешность округления с недостатком 0,008 больше погрешности округления с избытком 0,002. Значит, точность округления с избытком выше.

Чтобы при округлении положительных чисел абсолютная погрешность приближения была меньше, нужно пользоваться следующим правилом.

Если первая отбрасываемая цифра меньше 5, то при округлении берут приближенное значение с недостатком, если первая отбрасываемая цифра равна 5 или больше 5, то при округлении берут значение с избытком.

Например, при округлении чисел 89,621 и 6,784 с точностью до 0,1 получим $89{,}621 \approx 89{,}6$; $6{,}784 \approx 6{,}8$, а при округлении их с точностью до сотых получим $89{,}621 \approx 89{,}62$; $6{,}784 \approx 6{,}78$.

При округлении числа считают, что абсолютная погрешность не превосходит единицы наименьшего разряда приближенного значения и значения всех его цифр верные.

Например, запишем дробь $\frac{4}{7}$ в виде десятичной дроби: 0,571 428... и округлим ее с точностью: а) до 0,01; б) до 0,00 001.

Получим а) $0{,}571\,428... \approx 0{,}57$, б) $0{,}571\,428... \approx 0{,}57\,143$.

Абсолютная погрешность приближенного значения: а) 0,57; б) 0,57 143 не превосходит (меньше или равна): а) 0,01; б) 0,00 001 — единицы его наименьшего разряда. Все цифры приближенных значений 0,57 и 0,57 143 верны.

При записи числа в стандартном виде $a \cdot 10^n$ считают, что все цифры числа a верные.

Например, расстояние в световой год равно $9{,}46 \cdot 10^{12}$ км. Это означает, что все цифры числа 9,46 верны.

Тогда $9{,}46 \cdot 10^{12} = (9{,}46 \pm 0{,}01) \cdot 10^{12}$ км $= 9{,}46 \cdot 10^{12}$ км $\pm$ $\pm\, 10^{10}$ км, т. е. расстояние в световой год взято с точностью до 10^{10} км.

При измерении, *например*, длин двух различных предметов получили: $x = (0{,}2 \pm 0{,}1)$ см и $y = (200{,}0 \pm 0{,}1)$ см.

В обоих случаях результаты получены с точностью до 0,1 см. Можно ли утверждать, что качество этих измерений одинаковое? Почему качество измерения длины y по сравнению с качеством измерения длины x намного лучше?

Для оценки качества измерения используют не только абсолютную погрешность, но и *относительную погрешность*.

Относительной погрешностью приближенного значения называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения.

Относительную погрешность обозначим буквой ε (*эпсилон*).

Тогда $\varepsilon = \frac{|x - x_1|}{|x_1|}$, где x_1 — приближенное значение x.

Поскольку по определению $|x - x_1| \leq h$, где h — точность приближения, то относительная погрешность $\varepsilon \leq \frac{h}{|x_1|}$.

Например, $x = (0,2 \pm 0,1)$ см означает, что в результате измерения величины x получили приближенное значение $x_1 = 0,2$ с точностью $h = 0,1$. Значит, относительная погрешность $\varepsilon \leq \frac{0,1}{0,2}$ или $\varepsilon \leq 0,5$.

$y = (200,0 \pm 0,1)$ см означает, что в результате измерения величины y получили приближенное значение $y_1 = 200,0$ с точностью $h = 0,1$. Значит, относительная погрешность $\varepsilon \leq \frac{0,1}{200,0}$ или $\varepsilon \leq 0,0005$.

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Вы знаете, чтобы выразить частное в процентах, нужно значение частного умножить на 100 и к полученному значению произведения приписать знак процента: $\varepsilon \leq \frac{|x - x_1|}{|x_1|} \cdot 100\%$.

Пример 1. Вычислим в процентах относительную погрешность измерения длин x и y, рассмотренных выше.

Решение. Относительная погрешность, допущенная при измерении длины x, равна:

$$\varepsilon_1 \leq \frac{0,1}{0,2} \cdot 100\% = \frac{1}{2} \cdot 100\% = 0,5 \cdot 100\% = 50\%.$$

Относительная погрешность, допущенная при измерении длины y, равна:

$$\varepsilon_2 \leqslant \frac{0,1}{200} \cdot 100\% = \frac{1}{2000} \cdot 100\% = 0,0005 \cdot 100\% = 0,05\%.$$

Ответ: 50%, 0,05%.

Пример 2. Найдем абсолютную и относительную погрешности числа $x = 7,45 \cdot 10^{22}$.

Решение.

Так как в числе 7,45 все цифры верные и последней является цифра сотых, то $x = (7,45 \pm 0,01) \cdot 10^{22}$. Раскрыв скобки, получим: $x = 7,45 \cdot 10^{22} \pm 0,01 \cdot 10^{22}$, или $x = 7,45 \cdot 10^{22} \pm 10^{20}$.

Эта запись означает, что абсолютная погрешность числа x меньше или равна 10^{20}. Оценим относительную погрешность приближенного числа $x = 7,45 \cdot 10^{22}$. Относительную погрешность числа x найдем по формуле:

$$\varepsilon_2 \leqslant \frac{|x - x_1|}{|x_1|} \cdot 100\% = \frac{10^{20}}{7,45 \cdot 10^{22}} \cdot 100\% = \frac{1}{7,45}\% = 0,134\%.$$

Ответ: 10^{20} и 0,134%.

Назовите порядок числа, представленного в стандартном виде:

1) $4,3 \cdot 10^{5}$; 2) $2,34 \cdot 10^{-4}$; 3) $8,3 \cdot 10^{-13}$;

4) $9,123 \cdot 10^{-1}$; 5) $5,31 \cdot 10^{12}$; 6) $7,1 \cdot 10^{-32}$.

Представьте в стандартном виде число:

1) 23 000 000 000; 2) 3 045 000 000;

3) 153 000 000; 4) 0,0 000 012;

5) $600,32 \cdot 10^{5}$; 6) 0,00 000 203.

Представьте в виде степени числа 10 число:

1) 1000; 2) 10 000 000; 3) 0,00 001; 4) 0,00 000 001.

Запишите в стандартном виде число, встречающееся в предложении:

1) диаметр головки английской булавки равен 0,001 м;

2) диаметр атома водорода равен 0,00 000 000 003 м;

3) площадь Мирового океана равна 361 000 000 км^2;

4) площадь озера Балкаш равна 22 000 км^2;

5) площадь Каспийского моря равна 370 000 км^2;

6) при ударе на клавишу компьютера тратится энергия в 0,1 Дж;

7) при взмахе крылом пчела затрачивает энергию в 0,0009 Дж.

Запишите в стандартном виде числа, встречающиеся в тексте: "Казахстан занимает площадь, равную 2 724 900 км^2. На востоке, севере и северо-западе Казахстан граничит с Россией (протяженность границы — 6467 км), на юге — с государствами Центральной Азии: Узбекистаном (2300 км), Кыргызстаном (980 км) и Туркменистаном (380 км), а на юго-востоке — с Китаем (1460 км). Общая протяженность границ Казахстана составляет почти 12 200 км, в том числе 600 км — по Каспийскому морю (на западе). Общая протяженность железных дорог составляет 14,5 тыс. км, автомобильных — 87,4 тыс. км".

Объясните запись:

1) $a = 4,7 \pm 0,2$; 2) $a = 43,74 \pm 0,05$;

3) $a = -2\frac{3}{4} \pm \frac{3}{5}$; 4) $a = -3\frac{3}{5} \pm \frac{1}{10}$;

5) $a = 7,90 \pm 0,12$; 6) $a = -3,45 \pm 0,15$;

7) $a = -47 \pm 2$; 8) $a = 0,97 \pm 0,01$.

Запишите в виде двойного неравенства равенство:

1) $x = 43,32 \pm 0,05$; 2) $y = -513,2 \pm 0,05$;

3) $n = 433 \pm 0,1$; 4) $x = 43,2 \pm 0,25$.

Найдите абсолютную погрешность приближенного значения числа x, все цифры которого верные:

1) $x \approx 2,74$; 2) $x \approx 35,274$; 3) $x \approx -4,004$;

4) $x \approx 0,740$; 5) $x \approx -8,7040$; 6) $x \approx 0,07$.

Масса атома водорода равна 0,000 000 000 000 000 000 000 167 г, масса Земли равна 6 000 000 000 000 000 000 000 т. Запишите в стандартном виде массу атома водорода и массу Земли.

Найдите абсолютную и относительную погрешность приближенного значения, полученного в результате округления числа:

1) 12,4 до единиц; 2) 5,65 до десятых;

3) 876 до десятков; 4) 7,3346 до тысячных.

Найдите относительную погрешность, округлив до десятых число:

1) 0,879; 2) 20,456; 3) 133,507;

4) 0,058; 5) 0,987; 6) 10,509.

Найдите относительную погрешность приближенного значения x, записанного в виде $x = a \cdot 10^n$:

1) $x = 34{,}58 \cdot 10^8$; 2) $x = 5{,}93 \cdot 10^4$; 3) $x = 2{,}75 \cdot 10^{-3}$;

4) $x = 11{,}55 \cdot 10^0$; 5) $x = 25{,}18 \cdot 10^{-7}$; 6) $x = 0{,}086 \cdot 10^{-8}$.

Масса электрона равна $0{,}91 \cdot 10^{-30}$ кг. Укажите относительную погрешность приближенного значения $0{,}91 \cdot 10^{-30}$.

Запишите в стандартном виде числа, которые встречаются в предложении:

1) Масса океанов равна 1 450 000 000 000 000 000 000 кг. Масса Земли равна 5 980 000 000 000 000 000 000 000 кг. Представьте записанные массы в стандартном виде, в тоннах.

2) Расстояние от Солнца до Земли равно 149 500 000 км. Площадь поверхности Солнца 6 000 000 000 000 км^2. Площадь поверхности Земли 510 200 000 км^2. Площадь поверхности Луны 38 000 000 км^2. Представьте записанные площади в стандартном виде, в гектарах.

Найдите, во сколько раз длина диаметра Земли больше длины диаметра атомного ядра, если длина диаметра Земли равна $1{,}2756 \cdot 10^7$ м, длина диаметра атомного ядра равна $5 \cdot 10^{-15}$ м.

Выразите:

1) $2{,}7 \cdot 10^1$ т — в граммах;

2) $8{,}321 \cdot 10^3$ кг — в тоннах;

3) $1{,}3 \cdot 10^{-2}$ т — в килограммах;

4) $5{,}36 \cdot 10^{14}$ г — в миллиграммах;

5) $5{,}23 \cdot 10^{12}$ дм — в километрах;

6) $4{,}31 \cdot 10^5$ см — в метрах;

7) $1{,}32 \cdot 10$ [illegible] км — в метрах;

8) $2{,}51 \cdot 10^7$ мм — в сантиметрах.

Масса Земли $5{,}98 \cdot 10^{[illegible]}$ кг, масса Юпитера — $1{,}90 \cdot 10^{[illegible]}$ кг. Что больше: масса Земли или масса Юпитера и во сколько раз?

Запишите в стандартном виде значение выражения:

1) $(7{,}5 \cdot 10^{[illegible]}) \cdot (2{,}4 \cdot 10^{[illegible]})$; 2) $(1{,}3 \cdot 10^{[illegible]}) \cdot (3{,}7 \cdot 10^{[illegible]})$;

3) $(3{,}4 \cdot 10^{[illegible]}) \cdot (5{,}1 \cdot 10^{[illegible]})$; 4) $(5{,}5 \cdot 10^{[illegible]}) \cdot (2{,}4 \cdot 10^{[illegible]})$.

Преобразование выражений, содержащих степени, рассмотрим на примерах.

Пример 1. Решим задачу.

Скорость света равна $3 \cdot 10^8$ м/с, расстояние от Земли до Солнца равно $1,5 \cdot 10^{11}$ м. За какое время луч света пройдет расстояние от Солнца до Земли?

Решение. Длину пройденного пути (расстояние) s можно найти по формуле $s = v \cdot t$, где v — скорость движения, t — время движения. По этой формуле получим:

$1,5 \cdot 10^{11} = 3 \cdot 10^8 \cdot t$, откуда:

$$t = \frac{1,5 \cdot 10^{11}}{3 \cdot 10^8} = 0,5 \cdot 10^{11-8} = 0,5 \cdot 10^3 = 0,5 \cdot 1000 = 500.$$

Ответ: 500 с, или 8 мин 20 с.

Пример 2. Вычислим: 1) $\frac{(2^2)^3 \cdot 32}{64^2}$; 2) $\frac{25^5 \cdot 36^4}{(30)^7}$.

Решение. 1) $\frac{(2^2)^3 \cdot 32}{64^2} = \frac{2^6 \cdot 2^5}{(2^6)^2} = \frac{2^{12}}{2^{12}} = 2^{12-12} = 2^0 = 1$;

2) $\frac{25^5 \cdot 36^4}{(30)^7} = \frac{(5^2)^5 \cdot (6^2)^4}{(5 \cdot 6)^7} = \frac{5^{10} \cdot 6^8}{5^7 \cdot 6^7} = 5^{10-7} \cdot 6^{8-7} = 5^3 \cdot 6 = 125 \cdot 6 = 750.$

Ответ: 1) 1; 2) 750.

Пример 3. Найдем значение выражения: $\frac{13^4 \cdot 11^7 \cdot 5^5}{13 \cdot 11^6} : \frac{13^6 \cdot 11^4 \cdot 5^4}{13^4 \cdot 11^3}$.

Решение. $\frac{13^4 \cdot 11^7 \cdot 5^5}{13 \cdot 11^6} : \frac{13^6 \cdot 11^4 \cdot 5^4}{13^4 \cdot 11^3} = (13^{4-1} \cdot 11^{7-6} \cdot 5^5) : (13^{6-4} \cdot$ $\cdot 11^{4-3} \cdot 5^4) = 13^3 \cdot 11 \cdot 5^5 : (13^2 \cdot 11 \cdot 5^4) = 13^{3-2} \cdot 11^{1-1} \cdot 5^{5-4} = 13 \cdot 11^0 \cdot 5 =$ $= 65.$

Ответ: 65.

При сравнении степеней с натуральными показателями их приводят либо к одинаковым основаниям, либо к одинаковым показателям. В первом случае будет больше та степень, у которой больше показатель. Во втором случае больше та степень, у которой основание больше.

Пример 4. Сравним значения выражений $3^{40} \cdot 2^{40}$ и 33^{20}.

Решение. Запишем выражение $3^{40} \cdot 2^{40}$ в виде степени: $3^{40} \cdot 2^{40} = (3 \cdot 2)^{40} = 6^{40}$. Затем 6^{40} представим в виде степени с показателем 20. Получим $6^{40} = (6^2)^{20}$, или 36^{20}.

Поскольку $36^{20} > 33^{20}$, то $3^{40} \cdot 2^{40} > 33^{20}$.

Пример 5. Вычислим: $\dfrac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}}$.

Решение.

$\dfrac{4^{-2} \cdot 8^{-6}}{2^{-22}} = \dfrac{(2^2)^{-2} \cdot (2^3)^{-6}}{2^{-22}}$ — каждый множитель представили в виде степени числа 2;

$\dfrac{(2^2)^{-2} \cdot (2^3)^{-6}}{2^{-22}} = \dfrac{2^{-4} \cdot 2^{-18}}{2^{-22}}$ — в числителе использовали свойство степени: при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются;

$\dfrac{2^{-4} \cdot 2^{-18}}{2^{-22}} = \dfrac{2^{-22}}{2^{-22}}$ — в числителе использовали свойство степени: при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание степени оставляют прежним, а показатели складывают;

$\dfrac{2^{-22}}{2^{-22}} = 1$ — выполнили деление.

Ответ: 1.

Пример 6. Упростим выражение: $\left(\dfrac{1}{3}x^6y^{-7}\right)^{-2} \cdot 9^{-1}x^{12}y^{-14}$.

Решение.

$\left(\dfrac{1}{3}x^6y^{-7}\right)^{-2} \cdot 9^{-1}x^{12}y^{-14} =$ — использовали свойство степени: чтобы возвести в степень произведение, надо возвести в эту степень каждый множитель и результаты перемножить;

$= \left(\dfrac{1}{3}\right)^{-2} \cdot (x^6)^{-2} \cdot (y^{-7})^{-2} \cdot$

$\cdot 9^{-1}x^{12}y^{-14}$

$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-2} \cdot (x^6)^{-2} \cdot (y^{-7})^{-2} \times$
$\times\ 9^{-1}x^{13}y^{-13} = (-3)^2 \cdot x^{-12} \times$
$\times\ y^{14} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13}$ — использовали определение степени с отрицательным показателем и свойство степени: при возведении степени в степень показатели степеней перемножаются;

$(-3)^2 \cdot x^{-12} \cdot y^{14} \cdot 9^{-1}x^{13}y^{-13} =$
$= 9 \cdot x \cdot y \cdot 9^{-1}$ — возвели число -3 в квадрат и использовали свойство степеней с одинаковыми основаниями: при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание степени оставляют прежним, а показатели складывают;

$9 \cdot x \cdot y \cdot 9^{-1} = xy$ — умножили степени с одинаковыми основаниями.

Ответ: xy.

Пример 7. Найдем значение выражения: $\frac{5}{6^2}x^7y^4 \cdot 36x^{-7}y^{-5}$ при $y = \frac{1}{5}$.

Решение. Сначала упростим выражение $\frac{5}{6^2}x^7y^4 \cdot 36x^{-7}y^{-5}$.

Получим: $\frac{5}{6^2}x^7y^4 \cdot 36x^{-7}y^{-5} = 5 \cdot 6^{-2}x^7y^4 \cdot 6^2x^{-7}y^{-5}$ — представили числа в виде степени;

$5 \cdot 6^{-2}x^7y^4 \cdot 6^2x^{-7}y^{-5} = 5 \cdot 6^0x^0y^{-1}$ — умножили степени с одинаковыми основаниями;

$5 \cdot 6^0x^0y^{-1} = 5y^{-1}$ — использовали определение степени с нулевым показателем;

$5y^{-1} = 5\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}$ — подставили вместо буквы y число $\frac{1}{5}$.

$5 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-1} = 5 \cdot 5 = 25.$

Ответ: 25.

Пример 8. Докажем тождество: $\left(-\frac{1}{2}a^{-1}b^{2}\right)^{2}\cdot 4a^{3}b^{-3}=ab.$

Доказательство. Упростим левую часть равенства.

$\left(-\frac{1}{2}a^{-1}b^{2}\right)^{2}\cdot 4a^{3}b^{-3}=\frac{1}{4}a^{-2}b^{4}\times$ — получили правую часть

$\times 4a^{3}b^{-3}=ab$ равенства.

Пример 9. Докажем, что не зависит от n значение выражения $\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{25^{-n}\cdot 49^{-1}\cdot 3^{-3}}$.

Доказательство. Упростим выражение: $\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{25^{-n}\cdot 49^{-1}\cdot 3^{-3}}$.

$\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{25^{-n}\cdot 49^{-1}\cdot 3^{-3}}=$ — представили числа 25 и 49 в виде степеней;

$=\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{(5^{2})^{-n}\cdot (7^{2})^{-1}\cdot 3^{-3}}$

$\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{(5^{2})^{-n}\cdot (7^{2})^{-1}\cdot 3^{-3}}=$ — в знаменателе возвели степень в степень;

$=\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{5^{-2n}\cdot 7^{-2}\cdot 3^{-3}}$

$\frac{5^{-2n}}{5^{-2n}}\cdot\frac{7^{-2}}{7^{-2}}\cdot\frac{1}{3^{-3}}=\frac{1}{3^{-3}}$ — сократили дробь;

$\frac{1}{3^{-3}}=1:3^{-3}=1:\frac{1}{3^{3}}=3^{3}$ — по определению степени с отрицательным показателем и правилу деления натурального числа на дробь.

$3^{3}=27.$

Ответ: 27.

Поскольку значение выражения $\frac{5^{-2n}\cdot 7^{-2}}{25^{-n}\cdot 49^{-1}\cdot 3^{-3}}$ равно 27, значит оно не зависит от n.

Упростите выражения:

1) $(a^5)^2 : a^9 \cdot a^3$;   2) $a^{21} \cdot (a^4)^? : (a^?)^{10}$;

3) $b^{10} : (b^2)^{11} : (b^4)^?$;   4) $(b^6)^4 : (b^7)^? \cdot (b^2)^8$.

1) $(x^2y)^? : (x^5y^3)^? \cdot xy$;   2) $(xy^4)^? \cdot (x^6y^4)^? : (x^{24}y^{32})$;

3) $\left(\frac{x}{y}\right)^8 : \left(\frac{x^2}{y}\right)^4 \cdot xy^?$;   4) $x^?y^? \cdot (xy)^? : (x^?y^?)^?$.

Упростите выражения и найдите их значения:

1) $(n^?)^2 : (n^2)^3 \cdot n^{10} : n^8$ при $n = 0,3$;

2) $a^{?0} \cdot (a^8)^4 : (a^{10})^?$ при $a = 5,5$;

3) $(b^{17})^? : b^{36} : (b^4)^?$ при $b = \frac{2}{7}$;

4) $((a^4)^? \cdot a^{11}) : ((a^{?})^? \cdot a^?)$ при $a = 4$.

1) $a^{10}b^{17} : (a^4b^8)^2$ при $a = 3\frac{1}{2}$ и $b = \frac{4}{7}$;

2) $(x^{?})^? \cdot (y^{?})^? : (x^?y^{16})^?$ при $x = \frac{6}{11}$ и $y = 11$;

3) $(m^?)^? \cdot (n^?)^? : (m^{11}n^7)^?$ при $m = \frac{8}{9}$ и $n = 0,81$;

4) $(c^?d^?)^? : (c^?)^? : (d^?)^3$ при $c = -0,25$ и $d = \frac{4}{5}$.

При каком значении переменной m верно равенство:

1) $303 - 7^3 + (2^?)^? = m^?$;   2) $(-3)^? - (-5)^? + 282 = m^?$;

3) $16,31 - (1,3)^2 + (19)^? = m^?$;   4) $49\frac{1}{8} + \left(\frac{1}{2}\right)^{?} + (-24)^? = m^?$?

Вместо звездочки вставьте число, чтобы было верным равенство:

1) $10^4 - 9375 = 5^*$;   2) $2015 + 14^? = 9^*$;

3) $3^* - 11\,683 = (20)^?$;   4) $1199 + 7^? = (60)^*$.

Докажите, что при любых значениях переменной равно единице значение выражения:

1) $(a^5)^? \cdot (a^4b^?)^? : (a^{2?}b^?)^?$;   2) $(a^4b^?)^3 \cdot (a^?b^?) : (a^{10}b^{1?})^?$;

3) $(c^?)^? \cdot (d^{1?})^? : (c^?d^?)^?$;   4) $(x^{11}y^?)^4 \cdot (y^?)^? : (x^{??}y^?)^?$.

Докажите, что значение выражения не зависит от значения переменной:

1) $((n^{2})^{3})^{2} : (n^{3})^{4} \cdot 5 \cdot n^{10}$;   2) $m^{30} : ((m^{3})^{2})^{4} + 17 \cdot (m^{4})$;

3) $((a^{2})^{2})^{2} \cdot a^{4} + 19 \cdot (a^{3})^{4}$;   4) $23 \cdot b^{10} + ((b^{3})^{3})^{2}$.

Упростите выражение:

1) $(0,25a^{-4}x^{3}) \cdot (5^{2}a^{2} \cdot x^{-4})$;   2) $(2,25b^{-3}x^{3}) \cdot (5^{2}b^{3} \cdot x^{-3})$;

3) $(5a^{-2}x^{5}) \cdot (5^{2}a^{3} : x^{7})$;   4) $(1,25a^{-1}x^{7}) : (5^{2}a^{8} \cdot x^{-4})$.

Найдите значение выражения:

1) $\frac{17^{7} \cdot 17^{-4}}{17^{-3}}$;   2) $\frac{0,7^{4} \cdot 0,7^{-8}}{0,7^{3}} \cdot 3$;

3) $\frac{0,5^{4} \cdot 2^{3}}{4^{2}} : 8^{2}$;   4) $1,33^{-5} \cdot 1,33^{6} : p^{0}$.

Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a^{6}}{a^{2}} \cdot a^{2}\right) : a^{2}$;   2) $x^{3} : (x^{-1})^{3} : p^{0}$;   3) $(b^{4} - b^{3}) : b^{3}$.

Вместо звездочки запишите число, чтобы было верным равенство:

1) $2^{5} \cdot 2^{-4} \cdot * = 2^{3}$;   2) $4^{5} \cdot 8^{-4} \cdot * = 4^{7}$;   3) $5^{3} \cdot 5^{-2} : * = 5^{7}$.

Расположите в порядке возрастания числа:

3^{-1}; 3^{0}; 9^{2}; 27^{-2}; 81^{0}; -3^{2}; -9^{-1}.

Расположите в порядке убывания числа:

5^{-1}; 5^{0}; 25^{2}; 27^{-2}; 521^{0}; -8^{2}; -4^{-2}.

Докажите, что отрицательным числом является значение выражения:

1) $\frac{(-3)^{5} \cdot 9^{-2}}{(-81)^{-2}}$;   2) $\frac{(-4)^{1} \cdot 9^{-2}}{11^{0}}$;   3) $\frac{(-5)^{3} \cdot (-9^{-2})}{8^{2}}$.

Докажите, что значение выражения является положительным числом:

1) $21^{0} \cdot 3^{-2} - 4^{-2}$;   2) $2^{-2} + 3^{-1} + (-4)^{2}$;   3) $9^{-1} \cdot \frac{(-3)^{2}}{|-5^{2}|}$.

Докажите тождество:

1) $x^3 : (x^{-1})^3 + \pi^0 = 1 + x^6$; 2) $(b^4 - b^3) : b^2 = b^2 - b$;

3) $\dfrac{2^4 : 4}{14^0 \cdot a^{-2}} \cdot a^2 = \dfrac{4}{a^{-4}}$.

Упростите выражени :

1) $\dfrac{\left(b^5\right)^3 \cdot \left(b^7\right)^7}{b^{19} \cdot b^{38}}$; 2) $\dfrac{c^{50} \cdot c^{11}}{\left(c^{20}\right)^2 \cdot \left(c^2\right)^5}$;

3) $\dfrac{\left(a^9\right)^3 \cdot \left(a^3\right)^4 \cdot a^{23}}{a^{40} \cdot a^{18}}$; 4) $\dfrac{d^{18} \cdot \left(d^8\right)^3 \cdot \left(d^7\right)^2}{\left(d^3\right)^{10} \cdot \left(d^6\right)^2}$.

1) $(ab)^{10} : (a^9 \cdot b^8) \cdot a^2$; 2) $((x^5y^2)^3)^4 : ((x^{29})^2 \cdot (y^{12})^2)$;

3) $((k^6)^7) \cdot (t^3)^9 : ((k^7 \cdot t^4)^3)^2$; 4) $((c^8d^{11})^5)^2 : ((c^{20}d^{25})^2)^2$.

Упростите выражение:

1) $\dfrac{8^3}{14^0} : \dfrac{4}{a^{2}} \cdot a^3$; 2) $\dfrac{(x^3 \cdot x)^2}{(-x^2)^3}$;

3) $\dfrac{(a^3 \cdot x^4)^2}{(a^2)^2 \cdot x^7}$; 4) $\dfrac{(b^2 \cdot x^4)^3}{(-2b^2)^2 \cdot x^{12}}$.

Найдите значение выражения:

1) $\dfrac{\left(\frac{1}{9}\right)^{-3} \cdot \frac{1}{9}}{3^3}$; 2) $45 \cdot \dfrac{5^{-2}}{9^2}$; 3) $\dfrac{34^3}{17^3 \cdot 2^4} \cdot 8^2$.

Верны ли равенств :

1) $\dfrac{\left(2^4\right)^6 \cdot 4^5}{16^5 \cdot 8^7} = 2$; 2) $\dfrac{\left(17^8\right)^2 \cdot \left(17^2\right)^3 \cdot 16^5}{17^{22} \cdot 289 \cdot 8^6} = 64$?

1) $\dfrac{\left(a^5\right)^6 \cdot \left(b^9\right)^4 \cdot \left(a^2b^2\right)^3}{\left(b^4\right)^{10} \cdot \left(a^7\right)^5} = ab^2$; 2) $\dfrac{\left(c^3 \cdot d^5\right)^{11} \cdot \left(c^7\right)^5 \cdot \left(d^4\right)^2}{\left(d^{21}\right)^3 \cdot \left(c^{25}\right)^4} = c^9d$?

Докажите, что при $a = 1$, $b = -1$ значения выражений равны:

1) $(a^5 \cdot b^6)^7 : (a^{35} \cdot b^{40}) + 1$ и $(a^7b^4)^2 : (a^5b)^? + 3$;

2) $\dfrac{(a^{-4})^5 \cdot (b^{10})^2}{a^8 \cdot (b^?)^3} - 4$ и $\dfrac{(a^?)^4}{(a^?)^5} \cdot \dfrac{(b^?)^2}{b^{16}} - 6$.

Выполните действия и приведите выражение к виду, не содержащему отрицательных показателей степеней:

1) $\dfrac{(a^{-3} \cdot x^?)^2}{(a^{-2})^2 \cdot x^{-7}} \cdot 2^{-2}$; 2) $\dfrac{(b^3 \cdot y^{-3})^2}{(b^2)^? \cdot y^7} \cdot y^{-1}$; 3) $\dfrac{(3^? \cdot x^4)^{-2}}{(3^2)^? \cdot x^{-7}} + \dfrac{2}{x^{-3}}$.

Верно ли, что натуральным числом является значение выражения:

1) $\dfrac{(3^? \cdot x)^2}{(x^?)^3 \cdot b^?}$ при $x = 0{,}5$ и $b = \dfrac{1}{3}$; 2) $\dfrac{(a^? \cdot x^?)^2}{(a^2)^? \cdot x^?}$ при $a = 0{,}1$ и $x = 2$?

Докажите, что от n не зависит значение выражения:

1) $\dfrac{2^{?n} \cdot 3^{-2}}{4^{?} \cdot 3^{?}}$; 2) $\dfrac{5^{3n} \cdot 31^{-2}}{125^{n} \cdot 17^{-1}}$; 3) $\dfrac{0{,}2^{?n} \cdot 13^{-2}}{0{,}04^{n} \cdot 23^{-1}}$.

1. Вычислите: $2^{10} \cdot 2^{17} : 2^{21}$:

A. 4; B. 2; C. 1; D. 8.

2. Упростите: $a^{35} \cdot a^{19} : (a^{52} \cdot a^{2})$:

A. a; B. a^{4}; C. 1; D. a^{2}.

3. Упростите выражение $\frac{x^{10}y^{8}}{x^{9}y^{6}}$ и найдите его значение при $x = 2$, $y = 3$:

A. 24; B. 12; C. 6; D. 18.

4. Вычислите $0{,}2 \cdot (-5)^2 - 3^3$:

A. -32; B. -22; C. -2; D. 52.

5. Упростите: $\frac{(m^{8})^{5} \cdot (n^{4})^{5}}{(m^{3})^{3} \cdot (n^{5})^{2}}$:

A. $m^{23}n^{12}$; B. $m^{7}n^{22}$; C. $m^{5}n^{3}$; D. $m^{7}n^{2}$.

6. Представьте в виде произведения степеней выражение $\frac{x^{-4}}{y^{6}}$:

A. $x^{4}y^{6}$; B. $x^{-4}y^{6}$; C. $x^{-4}y^{-6}$; D. $x^{4}y^{-6}$.

7. Упростите: $5^{-5} \cdot 25^{2}$:

A. 5; B. $\frac{1}{5}$; C. 25; D. $\frac{1}{25}$.

8. Представьте в виде произведения степеней выражение $\frac{a^{2}}{b^{3}c^{-4}}$:

A. $a^{2}b^{3}c^{-4}$; B. $a^{2}b^{-3}c^{4}$; C. $a^{-2}b^{-3}c^{-4}$; D. $a^{-2}b^{-3}c^{4}$.

9. Упростите выражение $\frac{5a^{9} - 3a^{7}}{4a^{8}}$ и найдите его значение при $a = -1$:

A. $\frac{1}{2}$; B. $-\frac{1}{2}$; C. 2; D. -2.

10. Найдите пятую степень числа, если его куб равен $-\frac{1}{8}$:

A. $\frac{1}{32}$; B. $-0{,}5$; C. $-\frac{1}{32}$; D. -32.

Что такое *одночлен, его степень и стандартный вид*? Как умножать одночлены?

Произведение числовых и буквенных множителей и их степеней называется *одночленом*.

Рассмотрите произведения 3^2xy; $15ab^3$; $\frac{8}{9}nm^4$; $\left(1\frac{1}{7}\right)^2 x^5$. В их состав входят множители, записанные с помощью цифр, они называются *числовыми множителями*, и множители, записанные буквами (переменными) и их степенями, они называются *буквенными множителями*.

Почему указанные выше произведения являются одночленами?

Так как каждое число можно записать в виде произведения этого числа на единицу и единица есть нулевая степень любого числа a, не равного нулю, то выражения вида 7; b; $0{,}09$; $\frac{5}{6}$ также считаются одночленами.

Пример 1. Как найти значение выражения, которым является одночлен $25a^3b\cdot(0{,}4ab^2)\cdot 3bc$, при $a=-1$, $b=2$, $c=-13$?

Решение. Первый способ. Подставив данные значения букв (переменных) в одночлен, вычислим значение произведения:

$$25\cdot(-1)^3\cdot 2\cdot 0{,}4(-1)\cdot 2^2\cdot 3\cdot 2\cdot 13=-6240.$$

Второй способ. Вычисления можно провести более рационально, если сначала упростить данный одночлен, используя переместительное и сочетательное свойства умножения:

$$25a^3b\cdot(0{,}4ab^2)\cdot 3bc=(25\cdot 0{,}4\cdot 3)\cdot(a^3\cdot a)\cdot(b\cdot b^2\cdot b)\cdot c=30a^4b^4c.$$

Найдем значение одночлена $30a^5b^4c$ при заданных значениях букв (переменных). Получим: $30\cdot(-1)^5\cdot 2^4\cdot 13=-6240$.

Ответ: -6240.

При решении задачи вторым способом данный одночлен был записан в виде: $30a^5b^4c$. В нем содержится только один числовой множитель, стоящий на первом месте, и степени с различными буквенными основаниями. Такие одночлены называются *одночленами стандартного вида*.

Любой одночлен можно привести к одночлену стандартного вида, т. е. представить его в виде произведения числового множителя, стоящего на первом месте, и степеней с различными буквенными основаниями.

Числовой множитель одночлена, записанного в стандартном виде, называется *коэффициентом одночлена*.

Например, коэффициент одночлена $\frac{4}{9}x$ равен $\frac{4}{9}$, коэффициент одночлена $-7x^2$ равен -7.

Пример 2. Как привести к стандартному виду одночлен

$$-0{,}6d^4\cdot\left(\frac{5}{6}d^2\right)?$$

Решение. Применяя переместительное и сочетательное свойства умножения, а также свойство умножения степеней с одинаковыми основаниями, имеем: $-0{,}6d^4\cdot\left(\frac{5}{6}d^2\right)=\left(-0{,}6\cdot\frac{5}{6}\right)\cdot(d^4\cdot d^2)=-0{,}5d^6$.

Ответ: $-0{,}5d^6$.

Коэффициент, равный 1, обычно не записывают, так как от умножения на единицу значение выражения не меняется.

Например, $1\cdot a^4b^3c=a^4b^3c$, поэтому коэффициент одночлена a^4b^3c равен единице.

Если коэффициент равен (-1), то в этом случае перед одночленом ставится только знак "$-$".

Например, $(-1)\cdot mn^4t^3=-mn^4t^3$, поэтому коэффициент одночлена $-mn^4t^3$ равен -1.

В одночлене $3a^4b^3c$ значение суммы показателей всех степеней переменных равно 8. Число 8 называют *степенью одночлена* $3a^4b^3c$.

Значение суммы показателей степеней всех переменных, входящих в одночлен, называется степенью одночлена.

Например, степень одночлена $-0{,}9x^5yz^2$ равна $5+1+2=8$; выражение $\frac{1}{11}a^8b$ есть одночлен девятой степени. Степень одночлена 125 равна нулю, так как $125 = 125\cdot a^0$ или $125\cdot x^0y^0$.

Некоторые одночлены имеют общую буквенную часть.

Одинаковые одночлены и одночлены, имеющие общую буквенную часть и отличающиеся друг от друга только коэффициентами, называются *подобными одночленами*.

Например, одночлены $7xy^3t$, $-8{,}9xy^3t$ и $1\frac{2}{7}xy^3t$ — подобные.

Рассмотрим умножение и возведение в степень одночленов.

Если между двумя одночленами поставить знак умножения, то получится одночлен, называемый *произведением* исходных одночленов. *Например*, произведением двух одночленов $9n^2m$ и $-1{,}1nm^3$ будет выражение $(9n^2m)\cdot(-1{,}1nm^3)$.

На основании сочетательного и переместительного свойств умножения это произведение можно записать в следующем виде: $9\cdot(-1{,}1)\cdot n^2nmm^3$ и, используя свойства степени, получим: $-9{,}9n^3m^4$.

Пример 3. Как найти произведение одночленов:

$4\frac{1}{3}x^2y$; $-0{,}3xz^3$; $10xy^3z^2$ и привести его к стандартному виду?

Решение. Произведением этих одночленов будет выражение $4\frac{1}{3}x^2y\cdot(-0{,}3xz^3)\cdot(10xy^3z^2)$. На основании сочетательного, переместительного свойств умножения и свойства степени это произведение запишем в следующем виде:

$$4\frac{1}{3}x^2y\cdot(-0{,}3xz^3)\cdot(10xy^3z^2) = \frac{13}{3}\cdot(-0{,}3)\cdot10\cdot x^2y\cdot xz^3\cdot xy^3z^2 =$$

$$= -13x^4y^4z^5.$$

Ответ: $-13x^4y^4z^5$.

При возведении одночлена в натуральную степень также получается одночлен, который обычно приводят к стандартному виду.

Чтобы возвести одночлен в степень, нужно в эту степень возвести каждый (и числовой, и буквенный) множитель.

Например, $\left(-\frac{1}{5}tk^4\right)^3 = \left(-\frac{1}{5}\right)^3 \cdot t^3 \cdot (k^4)^3 = -\frac{1}{125}t^3k^{12}$.

Пример 4. Как представить одночлен $-0,125x^6y^3$ в виде куба другого одночлена?

Решение. $-0,125x^6y^3 = (-0,5)^3 \cdot (x^2)^3 \cdot y^3 = (-0,5x^2y)^3$.

Ответ: $(-0,5x^2y)^3$.

Пример 5. Как найти, при каком значении *n* будет верно равенство:

$\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n \cdot \left(\frac{9}{49}m^{11}\right) = 29\frac{52}{81}m^{41}$?

Решение. Если $m = 0$, то данное равенство верно. Если $m \neq 0$, то разделим обе части данного равенства на $\frac{9}{49}m^{11}$, получим:

$\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n = 29\frac{52}{81}m^{41} : \frac{9}{49}m^{11}$ или $\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n = \frac{2401}{81} \cdot \frac{49}{9} \cdot m^{41-11}$.

Используя свойства степени, упростим правую часть равенства. Получим:

$\frac{2401}{81} \cdot \frac{49}{9} \cdot m^{41-11} = \left(\frac{7}{3}\right)^6 \cdot m^{30}$. Полученное выражение $\left(\frac{7}{3}\right)^6 m^{30}$ приведем к степени с основанием $\frac{7}{3}m^5$. Получим $\left(\frac{7}{3}m^5\right)^6$, или $\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^6$.

Таким образом: $\left(2\frac{1}{3}m^5\right)^n = \left(2\frac{1}{3}m^5\right)^6$. Отсюда: $n = 6$.

Ответ: n — любое при $m = 0$;

$n = 6$ при $m \neq 0$.

Какие из следующих выражений являются одночленами:

$8a$; $\quad 0,5bc$; $\quad \frac{2}{3}x^2yz$; $\quad \frac{x-2}{3}$; $\quad \frac{y+1}{z}$; $\quad 10\frac{a}{5}$; $\quad \frac{4}{b}$?

Среди одночленов $41,9a^2c$; $\frac{8}{17}x^5$; $6a^3ba$; $107x^2yzy^2$; $26a^2nm^{10}$; $2ab\cdot\frac{5}{9}b$; $0,24x^4y\frac{7}{3}x^2y$ укажите одночлены, записанные в стандартном виде.

Запишите в стандартном виде одночлены.

1) $8x^2x$; $\quad$ 2) $-b^3b^4b$; $\quad$ 3) xyx^4;

4) $-a^3(-a^5)$; $\quad$ 5) $7nm^4(-3n^3)$; $\quad$ 6) $\frac{5}{24}k^6t\left(-\frac{3}{10}t^6\right)$.

1) $1,8a^2b^7a^{10}$; $\quad$ 2) $\frac{14}{5}cd^5\left(-\frac{8}{7}c^4\right)$; $\quad$ 3) $2,8xt^4(-0,5x^2t)$;

4) $-b^5(-b^6)(-b)$; $\quad$ 5) $1,4a^4t\left(-\frac{3}{2}at^8\right)$; $\quad$ 6) $20bc^4(-0,05b^{10})$.

Найдите степень одночленов из упражнений

Приведите в стандартный вид одночлены.

1) $5a^3(-3)ab^2$; $\quad$ 2) $7m^2\cdot 6c^2m$; $\quad$ 3) $-6m^2 9am^3$;

4) $-8ac^2(-2a^4)$; $\quad$ 5) $3m^2np\cdot(-5mn^2 4)$; $\quad$ 6) $ab\cdot 9a\cdot 4b$.

1) $\left(-\frac{1}{2}m^3\right)(16m^2)$; $\quad$ 2) $\left(\frac{3}{4}x^2y^4z\right)\left(\frac{2}{3}x^2y^2z^2\right)$;

3) $\left(-\frac{3}{5}a^2xy^3\right)\left(\frac{2}{3}ax^2y\right)$; $\quad$ 4) $\left(10\frac{1}{3}ab^2c^4\right)\left(1\frac{5}{31}a^2bc^2\right)$.

1) $\left(\frac{4pc^2}{15}\right)\left(\frac{9ca^3}{2}\right)$; $\quad$ 2) $\left(-\frac{4}{5}m^4np\right)\left(-\frac{1}{4}m^2n^3p^2\right)$;

3) $\left(-4\frac{3}{4}mn^2\right)\left(-\frac{17}{38}amn\right)$; $\quad$ 4) $\left(6\frac{1}{2}x^3yz^2\right)\left(2\frac{2}{13}x^6yz^3\right)$.

Найдите степень одночлена:

1) $\left(\frac{2}{3}ab^2\right)^3$; 2) $\left(\frac{3}{4}a^2b^3\right)^4$; 3) $\left(\frac{4}{3}m^5n^2\right)^5$;

4) $\left(\frac{2}{9}m^{10}n^{12}\right)^2$; 5) $(-0,6a^4b^4)^4$; 6) $(-1,3x^{10}y^4)^2$;

7) $(0,02m^5n^3)^2$; 8) $(0,5x^2y^2)^7$.

Выполните умножение одночленов и найдите значение полученного выражения:

1) $\frac{3}{4}a^2 \cdot \frac{1}{5}b^2$ при $a = 2$, $b = \frac{3}{5}$;

2) $0,4\,ab \cdot 8b^2$ при $a = 0,5$, $b = 3$;

3) $0,5ab^3 \cdot 16a^2b$ при $a = -0,5$, $b = -2$;

4) $\frac{5}{18}a^3b^4 \cdot 3\frac{3}{5}a^4b^4$ при $a = -0,2$, $b = -5$.

Найдите значение выражения:

1) $\frac{1}{2}a^2b^4x \cdot \frac{3}{4}$ при $a = 2$, $b = 1$, $x = \frac{1}{2}$;

2) $-4a^3b^2c^2 \cdot 6a^4c^3$ при $a = 1$, $b = \frac{1}{4}$, $c = 2$;

3) $\frac{2}{5}x^4y^2z \cdot 7,5xz^4$ при $x = -2$, $y = -1$, $z = -0,5$;

4) $-25n^2m^2 \cdot 0,16n^5m^4$ при $n = -0,1$, $m = 10$.

Представьте в виде квадрата одночлен:

1) $16a^6$; 2) $100m^6n^4$; 3) $\frac{25}{81}x^6y^{12}$;

4) $\frac{169}{225}a^{10}b^2$; 5) $3,24m^4p^{14}$; 6) $0,0289\frac{x^{20}}{y^{18}}$.

Выпишите выражения, которые можно представить в виде квадрата и в виде куба одночлена, содержащие степени с натуральным показателем:

1) $a^{18}b^{36}$; 2) $n^6m^{18}k^6$; 3) $x^{21}y^{16}z^{20}$;

4) $0,16a^2b^6$; 5) $216a^6b^6$; 6) $7,296a^{15}c^9$.

Известно: $5x^2y^3 = 8$. Найдите:

1) $45x^2y^3$; 2) $3x^2y^3$; 3) $-5,5x^2y^3$;

4) $25x^4y^6$; 5) $125x^6y^9$; 6) $\frac{625}{128}x^8y^{12}$.

Упростите выражение $(a^5b^3)^6 \cdot (a^7b^4)^5 : (a^{21}b^{12})^3$ и найдите его значение при $a = -\frac{5}{11}$ и $b = 3\frac{2}{3}$.

Что такое многочлен, его степень и стандартный вид?

Вы знаете, что разность $a - b$ можно заменить суммой $a + (-b)$, поэтому выражения $a - b$ и $a + (-b)$ называют *алгебраическими суммами*.

Алгебраическая сумма нескольких одночленов называется *многочленом*.

Почему выражения $3 + a$; $a^2 - b^2$; $8c + 0{,}7d^2$; $\frac{2}{9}xy^2 + z - 3$ являются многочленами?

Одночлены, из которых составлен многочлен, называются *членами этого многочлена*.

Почему членами многочлена $25a + \frac{7}{9}xy^2 - 1{,}11n^4 + 10$ являются одночлены $25a$; $\frac{7}{9}xy^2$; $-1{,}11n^4$; 10?

Среди всех многочленов выделяют двучлен и трехчлен.

Многочлен, состоящий из двух членов, называется *двучленом*.

Почему $\frac{8}{11} + 6c$; $y - 7{,}3$ являются двучленами?

Многочлен, состоящий из трех членов, называется *трехчленом*.

Замена суммы подобных одночленов многочлена одним одночленом называется *приведением подобных членов* многочлена.

В многочлене $8xy^2 + 0,5mx - 0,7$ каждый одночлен записан в стандартном виде, и среди них нет подобных одночленов. Такой вид многочлена называют *стандартным видом многочлена.*

Чтобы привести многочлен к стандартному виду, вначале нужно записать каждый член многочлена в стандартном виде, а затем привести подобные члены получившегося многочлена.

Наибольшая из степеней одночленов, входящих в многочлен стандартного вида, называется *степенью многочлена.*

Почему многочлен $8xy^2 + 0,5mx - 0,7$ есть многочлен третьей степени?

Составьте многочлен из одночленов:

1) a^2; a и 5; 2) $9x^2$; x и -7; 3) $0,8y$; $-2y$ и y^7;

4) -4; $7b^3$ и d^4; 5) $\frac{4}{15}t^2$; k и 10; 6) $\frac{19}{5}k^4$; $-6,3k^3$ и k.

Приведите каждый член многочлена к стандартному виду и найдите степень многочлена:

1) $8xy^4x^3 - 9x^4yy^7 + 10zz^5$; 2) $0,2a^2bb^6 - 1,1xyx^7 + k^2t^2k$;

3) $\frac{1}{3}8ac^2a - 3,8t^2s^2s - b^6c^2b^{10}$; 4) $nm^{10}n^2 + \frac{2}{5}c^2dd^7 - t^4t^2t$.

Назовите каждый член многочлена:

1) $5x^4 - 6a^2c + 0,8y^5$; 2) $-40a^{10} - 3,8cd^2 - nm^3$;

3) $\frac{8}{3}ab^2 - \frac{10}{17}d^{10} - 1,2z$; 4) $5c - \frac{15}{26}xy^3 + 100$.

Приведите подобные члены многочлена

1) $13a - 2bc + 19bc$;

2) $10nm + 9x - 20nm$;

3) $0,7b^2 + 20a - 2,0b^2$;

4) $5xy - 14xy + 3,3a$;

5) $9,3c + 4,5d^3 - 5,1d^3$;

6) $0,1t^4 + 2,4c - 2,1t^4$.

1) $x^4 + a^2 - 6x^4 - 7a^2$;

2) $3y^3 - ab + 8y^3 + 9ab$;

3) $2ab^2 - nm - 5ab^2 + 6nm$;

4) $12c^2d - 7kt^2 + 8kt^2 - 10c^2d$;

5) $a^8c + 13a^8c - a^2d$;

6) $4x^3y - 6an + 2,1an - 7x^3y$.

1) $8\frac{2}{3}x^3 - 16ay^2 + 9ay^2 - 9x^3$;

2) $27a^2z - 24,89a^2z + 3\frac{1}{5}y^2 - 15y^2$;

3) $3,12ab + 7\frac{5}{6}m^3 - 4\frac{1}{6}m^3 + 16,82ab$;

4) $19,2x^2 - 30\frac{1}{9}kt + 31kt - 20x^2$.

Представьте в стандартном виде и назовите степени многочленов

1) $22a^2 - 40a^3 + 18a^2 + 29a^3 + a^4$;

2) $-7b^5 - 13b^6 + 15 - 9b^5 + 34b^6$;

3) $41c^2 + 62c^3 - 99 - 42c^2 + 38c^3$;

4) $-52k + k^4 - 18k^4 + 52 - k$.

1) $7,8x + 9,1y^2 - x + 1,9y^2 - 8,7y^2$;

2) $0,246z^3 - 15,2t + 16t - z^3 - 0,94$;

3) $-29,1c^2 + 0,17d^5 - d^5 + 30c^2 - 1,1d^3$;

4) $40,4a^3 - b^4 + 2,6a^3 - 44a^3 + 0,73b^4$.

1) $1\frac{3}{7}b^2 - 10a^3 - \frac{2}{3}b^2 - \frac{3}{7}b^2 + 9a^3$;

2) $-8,5c^4 + 17b + 6\frac{2}{3}c^4 + \frac{5}{6}c^4 - 19b$;

3) $2\frac{2}{3}t^5 + 40a^2 - 3\frac{4}{9}t^5 - 41a^2 + 1\frac{1}{3}t^5$;

4) $-\frac{6}{7}k^6 - 8,8d^4 + 2\frac{6}{11}k^6 + 9d^4 - \frac{9}{11}k^6$.

Найдите значения многочлено..

1) $5x^2 - 8x^{\ldots}$ [illegible] 44 [illegible] $10x^{\ldots} + 7x^{\ldots}$ [illegible] 60 при $x = -2$;

2) $-7y^2 + 13y^{\ldots} - 71 - 3y^2$ [illegible] $59 - 11y^{\ldots}$ при $y = 3$;

3) $37 + 12a^{\ldots}$ [illegible] $a^{\ldots}$ [illegible] 40 [illegible] $4a^{\ldots}$ [illegible] $10a^1$ при $a =$ [illegible] 3;

4) -100 [illegible] $29b^{\ldots} - 51b^{\ldots}$ [illegible] $52b^{\ldots}$ [illegible] $27b^{\ldots}$ [illegible] 200 при $b = 2$.

1) $\frac{1}{3}x^1 - \frac{7}{9}x^{\ldots}$ [illegible] $2{,}5$ [illegible] $x^{\ldots}$ [illegible] $x^{\ldots}$ [illegible] 6 при $x = 1$;

2) 72 [illegible] $\frac{1}{5}a^{\ldots}$ [illegible] $\frac{3}{4}a^{\ldots}$ [illegible] $\frac{2}{5}a^{\ldots}$ [illegible] $a^{\ldots}$ [illegible] 69 при $a =$ [illegible] 1;

3) $80{,}3$ [illegible] $\frac{3}{8}y^{\ldots}$ [illegible] $79{,}4$ [illegible] $y^{\ldots} - \frac{5}{6}y^{\ldots} + y^{\ldots}$ при $y =$ [illegible] 1;

4) $-\frac{11}{17}b^{\ldots} + 99{,}1$ [illegible] $\frac{8}{13}b$ [illegible] $b^{\ldots}$ [illegible] $\frac{5}{13}b$ [illegible] 100 при $b = 1$.

Найдите значение выражения:

1) $0{,}7ab - 49$ [illegible] a [illegible] $1{,}2ab$ [illegible] 47 при $a = \frac{2}{3}$; $b = \frac{9}{16}$;

2) 53 [illegible] $5{,}3xy - y - 4{,}8xy$ [illegible] $6y$ при $x = \frac{4}{13}$; $y = \frac{13}{7}$;

3) $mn + 8m$ [illegible] $9{,}2n$ [illegible] $9mn$ [illegible] $10n$ при $m = \frac{3}{4}$; $n = \frac{5}{8}$;

4) $13{,}2c - d$ [illegible] cd [illegible] $10d - 8cd$ при $c = \frac{5}{3}$; $d = \frac{14}{3}$.

Расположите по возрастающим степеням переменной одночлены многочлена:

1) $x^{\ldots} - 3x^{\ldots} + 5x^{\ldots}$ [illegible] x;
2) $-1{,}7y^{\ldots} - 2{,}8y^{\ldots}$ [illegible] y [illegible] $y^{\ldots}$;
3) $11a + 11$ [illegible] $a^{\ldots}$ [illegible] $1{,}9a^{\ldots}$;
4) $4{,}8b^{\ldots}$ [illegible] $b^{\ldots} - 10b - b^{\ldots}$.

Расположите по убывающим степеням переменной одночлены многочлена:

1) $6x^{\ldots}$ [illegible] $7x^{\ldots} + 9x^{\ldots} + x^{\ldots}$;
2) $-1{,}7y^{\ldots} + 2{,}8y^{\ldots} - y$ [illegible] $y^{\ldots}$;
3) $-10 + b^{\ldots}$ [illegible] $4b^{\ldots} - 5b - b^{\ldots}$;
4) $2x^{\ldots} - 3x^{\ldots}$ [illegible] $8x^{\ldots}$ [illegible] $7x^{\ldots}$.

Сравните значения многочленов:

1) $2{,}25x^{\ldots}$ [illegible] $16x^{\ldots}$ и [illegible] $2{,}5x^{\ldots} + 3x^{\ldots}$ при $x = -2$;

2) $3{,}6x^{\ldots} - 1{,}875x^{\ldots}$ и $0{,}125x^{\ldots} - x^{\ldots}$ при $x = 2$;

3) $1{,}9b^7 - b^6 - 2b^5$ и $-2{,}4b^4 - b^5 - 2{,}1b^4$ при $b = -1$;

4) $\frac{1}{3}a^{10} + \frac{2}{7}a^7 - \frac{2}{3}a^{10}$ и $\frac{6}{7}a^9 - a^8 - \frac{2}{7}a^9$ при $a = -1$.

Докажите, что равны значения многочленов:

1) $11\frac{1}{9}ab^2 - 18\frac{2}{3}ab^2 + 5\frac{1}{6}ab^2 - \frac{8}{9}ab^2 + 26{,}6$ и

$47{,}8a^2b - 6{,}3a^2b - 40{,}5a^2b - \frac{6}{7}a^2b$ при $a = 0{,}7$, $b = 5$;

2) $2{,}2c^3d^2 - 2\frac{1}{3}c^3d^2 + \frac{7}{15}c^3d^2$ и $2\frac{2}{9}c^4d - 2{,}5c^4d + \frac{1}{18}c^4d$

при $c = 3$, $d = -2$.

Как выполнять сложение, вычитание многочленов?

С многочленами можно выполнять арифметические действия. Действия с многочленами проводятся для упрощения выражений. При их выполнении используются преобразования: раскрытие скобок, приведение подобных членов.

Правило сложения многочленов:

чтобы сложить многочлены, надо последовательно записать все члены этих многочленов, а затем привести подобные члены многочлена.

Разность многочленов находится также, как и разность рациональных чисел.

Правило вычитания многочленов:

чтобы вычесть из одного многочлена другой многочлен, надо к уменьшаемому многочлену прибавить многочлен, противоположный вычитаемому многочлену.

Как найти разность многочленов: $(21.8y^4 - 17x^2 + 9\frac{1}{7}z - 50)$ и $(22y^4 - 31x^2 + 7\frac{2}{7}z - 49)$?

Для решения используем правило вычитания многочленов, получим:

$$21,8y^4 - 17x^2 + 9\frac{1}{7} - 50 - 22y^4 - 31x^2 + 7\frac{2}{7}z - 49$$

$= (21{,}8y^4 - 17x^2 \;\; 9\frac{1}{7}z \;\; 50) - (-22y^4 - 31x^2 - 7\frac{2}{7}z - 49) = 21{,}8y^4 -$

$- 17x^2 \;\; 9\frac{2}{7}z - 50 + 22y^4 + 31x^2 - 7\frac{2}{7}z + 49 = -0{,}2y^4 + 14x^2 \;\; 1\frac{3}{7}z \;\; 1.$

Найдите сумму многочленов:

1) $x^2 - 5$ и $x^2 - 4$; 2) $y \;\; 2x$ и $4x \;\; 6$;

3) $2ab + 1$ и $ab - 10$; 4) $1{,}8a^2 + y^2$ и $22a^2 \;\; 2y^2$

Найдите разность многочленов:

1) $20 + a^2$ и $90a^2 + 21$; 2) $4b \;\; c^2$ и $17b - 8c^2$;

3) $77 \;\; mn$ и $30mn + 8$; 4) $4{,}9kt + 3z$ и $-8{,}3kt - 5{,}2z$.

Найдите алгебраическую сумму многочленов:

1) $(4x + 8y) + (23x + 5y)$; 2) $(83a + 91b) - (89a \;\; 100b)$;

3) $(1{,}5m \;\; 4{,}2n) - (2m - 3n)$; 4) $(5k \;\; 6t) + (2{,}8t + 3{,}1k)$;

5) $\left(\frac{3}{16}a \;\; 20b\right) + \left(11b \;\; \frac{1}{16}a\right)$; 6) $\left(\frac{7}{15}a + 53d\right) + \left(60d \;\; \frac{3}{15}a\right)$.

1) $(5 + 4a^2) + (a + 2a^2)$; 2) $(y + 7x^2) \;\; (2{,}3 + 9x^2)$;

3) $(9b + 7c^2) \;\; (14b + 10c^2)$; 4) $(39n^2 - 2m) + (5m \;\; 11n^2)$

Заполните таблицу 12.1.

Таблица 12.1

A	B	$A + B$	$A - B$
$8{,}1 - 7x^2$	$9{,}2x^2 - 10$		
$-15{,}1 + 6y$	$23{,}2 - 11y^2$		

Если $A = \frac{2}{3}a^2 - 4,5$ и $B = 2\frac{1}{9}a^2 - 3,09$, то заполните таблицу 12.2.

Таблица 12.2

$A - B$		$B - A$		$-A - B$	

Верно ли равенство:

1) $(18,9 - x^2) + (5x^2 - 21) - (7x^2 - 39,9) = x^2$;

2) $(60b^2 + 51,3) - (70 - 62,8b^2) - (-2,8b^2 + 121) = 0,3$;

3) $\left(\frac{7}{9}y^4 - 10,1\right) - \left(17 - \frac{2}{3}y^4\right) - \left(27,1 - \frac{4}{9}y^4\right) = y^4$;

4) $\left(4,7c^2 - 6\frac{5}{7}\right) - \left(3\frac{4}{9} - 5c^2\right) - \left(0,7c^2 - 3\frac{5}{21}\right) = -c^2$?

Упростите и найдите значение выражения:

1) $(20a^3 - 7a^2) - (57 + 20a^3)$ при $a = 2$;

2) $(17,3x^2 - 62) - (3x - 17,3x^2)$ при $x = -5$;

3) $\left(8\frac{3}{4}b^3 + 9,1\right) - \left(2,7b^2 + 8,75b^3\right)$ при $b = \frac{1}{3}$;

4) $\left(1\frac{11}{19} - 11,3y^3\right) - (6y^2 - 11,3y^3)$ при $y = -\frac{3}{7}$.

При каком значении переменной равно нулю значение выражения:

1) $(90 - 24,1a) - (15,9a + 86)$; 2) $(4,5 - 0,23a) + (-2,9 - 0,13a)$;

3) $\left(1,6a + \frac{1}{12}\right) - \left(0,5a - \frac{5}{6}\right)$; 4) $(18,7a - 3) - \left(2\frac{2}{7} - 13,7a\right)$?

Найдите сумму и разность многочленов

1) $5x^2 - 0,18y^2$ и $6,2x^2 - 7y^2$; 2) $-10,9b^2 + 43c$ и $60c + 11,1b^2$;

3) $76n^2 - 27,2t$ и $30t - 80n^2$; 4) $88,1x - 64m^2$ и $41m^2 - 8,8x$.

1) $9\frac{1}{5}y + 81z^4$ и $39z^4 - 10y$;

2) $-51k^2 - 10\frac{3}{4}c$ и $12\frac{3}{4}c - 19k^2$;

3) $29m^2 - 3,8t$ и $2,8t - 21\frac{11}{19}m^2$;

4) $100s^2 - 31$ [illegible] k и $40k - 92,8s^2$.

Докажите, что не зависит от значений переменных значение выражения:

1) $(50 - 120x + 76y) + (88x - 74y) - (2y - 32x)$;

2) $(8{,}7a - 5{,}1b - 13) \quad (2{,}9a - 4{,}2b) + (0{,}9b - 5{,}8a)$.

Докажите тождество:

1) $(11a + 12b) - (20a \quad 34b) + (10a - 45b) = a - b$;

2) $(22{,}4x + 31{,}3y) - (4{,}9y \quad 30x) - (35{,}2y - 6{,}6x) \quad y \quad x$.

Упростите выражения:

1) $(a^2 - a^2 + 6) - (4a^2 + 8a^2 - 11)$;

2) $(11x^2 \quad 21x^2 - 43) + (60 \quad 19x^2 \quad 7x^2)$;

3) $(30b^2 - 15b - 16) - (17 - 17b - 44b^2)$;

4) $(-73 - 17x - 19x^2) \quad (18x^2 - 39x - 50)$.

1) $(5a^2 - 4x \quad 25) \quad (31 - 9a^2 \quad 3x)$;

2) $(17y - 8b^2 - 11) \quad (70 \quad 9b^2 - 18y)$;

3) $(2{,}3c - 9{,}1z^2 \quad 4) \quad (10z^2 - 3c - 5{,}9)$;

4) $(0{,}8t^2 \quad 20m - 5) \quad (41 - 3m \quad 2{,}4t^2)$.

1) $(xy - 6a) \quad (6a \quad z) \quad (8z - 10xy)$;

2) $(4b - 3cd) \quad (11b - 20k) - (23k \quad 19cd)$;

3) $(2t \quad mn) - (8mn \quad 9k) \quad (10k - 15z)$;

4) $(1{,}8a \quad bc) - (7{,}7bc - d) - (10{,}1d \quad a)$.

Выполните действия с многочленами A, B и C. Полученные многочлены запишите в таблицу 12.3, если $A = 1{,}8a^2b^3 \quad 25a^3b^2$; $B = 20a^2b^3 - 0{,}7a^2b^3$ и $C = 1{,}9a^2b^3 \quad 23a^3b^2$.

Таблица 12.3

$A + B + C$	$A \quad B \quad C$	$A \quad B \quad C$	$C - A - B$

Используя данные из упражнения найдите:

1) $B - A - C$; 2) $C \quad A - B$; 3) $B \quad A - C$.

Верно ли равенство:

1) $(a^2b^2z^2 - 0{,}3a^4b^2c^2) \quad (a^2b^2z^2 - 9{,}3a^4b^2c^2) = 9a^4b^2c^2$;

2) $(7x^2y^2z \quad 8{,}1xy^2z^2) - (7{,}1xy^2z^2 \quad 7x^2y^2z) = xy^2z^2$?

При каких значениях переменных значение алгебраической суммы равно 1:

1) $(17{,}5x^3y - 28{,}9xy^4) - (19{,}6x^3y - 28{,}9xy^4) - (2{,}7x - 27{,}9x^4y)$;

2) $8\frac{3}{16}a^2b^2 - 18\frac{8}{15}a^2b^2 + 20{,}6a^2b^2 - 8\frac{3}{16}a^2b^2 -$

$- 2\frac{1}{15}a^2b^2 - 3{,}1a^2$?

Докажите тождество:

1) $(-9k^3t^2 + 11k^2t) - (19k^2t - 8k^2t^2) + (10k^2t^2 + 8k^2t) = -9k^3t^2$;

2) $(5n^2m^4 - n^3m^3) - (7n^2m^4 - 10n^3m^3) - (6n^2m^4 - 8n^3m^3) = n^3m^3$.

Как выполнить умножение многочленов?

Сначала рассмотрим умножение многочлена на одночлен.

Произведением двучлена $30a - 7b$ и одночлена $0{,}4x$ является выражение $(30a - 7b) \cdot 0{,}4x$. На основании распределительного свойства умножения получим: $30a \cdot 0{,}4x + (-7b) \cdot 0{,}4x$, или $12ax - 2{,}8bx$. Как видим, каждый член двучлена (многочлена) умножили на одночлен и полученные результаты сложили.

Для умножения многочлена на одночлен можно использовать правило:

чтобы умножить многочлен на одночлен, надо умножить на этот одночлен каждый член многочлена и полученные произведения сложить.

Пусть требуется перемножить два многочлена: $a - c$ и $a^2 - c^2 - 5$. Их произведением будет выражение $(a - c) \cdot (a^2 - c^2 - 5)$.

Поскольку значением двучлена $a - c$ является число, то обозначим его буквой x. Используя распределительное свойство умножения, получим: $(a - c)(a^2 - c^2 - 5) = x \cdot (a^2 - c^2 - 5) = xa^2 - xc^2 - 5x = (a - c) \cdot a^2 + (a - c) \cdot (-c^2) + (a - c) \cdot (-5)$. Применяя еще раз правило умножения многочлена на одночлен, получим: $a^3 - a^2c - ac^2 + c^3 - 5a + 5c$. Таким образом, $(a - c)(a^2 - c^2 - 5) = a^3 - a^2c - ac^2 + c^3 - 5a + 5c$. Как видим, в результате умножения многочленов получился многочлен, равный сумме произведений каждого члена одного многочлена на каждый член второго многочлена.

Для умножения многочленов можно использовать правило:

чтобы умножить многочлен на многочлен, надо умножить каждый член одного многочлена на каждый член другого многочлена и полученные произведения сложить.

Запишите в виде многочленов произведени

1) $a(a - c - 1)$; 2) $-c(m - n - 3)$;

3) $5x(x - y^2 - 5)$; 4) $4y(y + x^2 - 6)$;

5) $-xy(3y^2 + 2x)$; 6) $mn(7 - m + 8n^2)$;

7) $2^2xy(4x - 3y - 5xy)$; 8) $-3a^2b(2a - 5b - 7ab)$.

1) $(x - a)(x + y)$; 2) $(a + z)(n - m)$;

3) $(t + s)(b + k)$; 4) $(c - d)(x - y)$;

5) $(a + 2)(b - 3)$; 6) $(4 - b)(5 + c)$;

7) $(d - 4)(t + 5)$; 8) $(k - 6)(7 - d)$.

1) $(x - 7)(x + 8)$; 2) $(9 - y)(y - 5)$;

3) $(a + 6)(4 - a)$; 4) $(2 - b)(b - 3)$;

5) $(10 - c)(9 - c)$; 6) $(d - 3)(d + 11)$.

1) $(b + 3)(b^2 - b - 7)$; 2) $(2 - a)(16 - a + a^2)$;

3) $(a + 4)(a^2 + a - 2)$; 4) $(5 - b)(4 - b - b^2)$;

5) $(3xy - 4)(6 + xy)$; 6) $(4nm + 3)(nm - 8)$.

1) $(a^2 - 2a - 4)(-a + 5)$; 2) $(7b - 20)(2 - b + 4b^2)$;

3) $(-3c^2 + c - 9)(5c + 6)$; 4) $(4 - 3d - 2d^2)(1 - 7d)$.

1) $(ab + 7)(8 - ab)$; 2) $(xy + 11)(xy - 12)$;

3) $(1,5 - 6nm)(8nm + 2,5)$; 4) $(9st - 1,6)(10 + 1,8st)$.

Упростите выражения

1) $8(3n - 2m) - 5(2n - m)$;

2) $-11(4x + 3y) - 9(2y - 3x)$;

3) $-1,2(5x - 6y) + 1,4(5y - 3x)$.

1) $(x - 4a)(5a + 8x) - (6a - 7x)(3x - 2a)$;

2) $(6c + d)(8c - 9d) - (-10d + 2c)(11c - 4d)$;

3) $(\frac{2}{3}b - 5k)(6k - 0,3b) - (3k + \frac{5}{6}b)(6b - 1,8k)$;

4) $(\frac{1}{7}x - \frac{1}{8}y)(7y - 8x) - (\frac{1}{7}y - \frac{1}{8}x)(7x - 8y)$.

Найдите значение выражения:

1) $8a^2(a - 5) - 4a(a^2 - 7)$ при $a = 3$;

2) $b(-9b^2 + 1) - 3b(2b^2 - b)$ при $b = -2$;

3) $(3x - 4)(8x + 2) - 24x^2 - 2$ при $x = 2$;

4) $(c^2 + 3)(c - 9) - c^2(c - 6)$ при $c = -5$.

Решите уравнение:

1) $3x(x^2 - 8) = 3x^3 - 12$; 2) $(x + 8)(5x - 6) - 20 = 5x^2$;

3) $18y^3 - 2y(2 + 9y^2) = -6,5$; 4) $53 - 8y(1 - 3y) = 24y^2$.

Решите неравенство:

1) $0,8x(5x - 0,8) + 0,04x < 4x^2 - 12$;

2) $9x^2 - 11 \geq 9x(x - 2) - 3$;

3) $(4x - 5)(6 - 3x) - 4 < (1 - 2x)(7 + 6x)$;

4) $(1,8x - 1)(5x - 1) - 2,2x > 9x^2 - 4$.

Докажите тождество:

1) $(7x - 3)(4 - 8x) + 2x(28x - 26) = -12$;

2) $1,1x^2(x^2 - 10) - x(1,1x^3 - 9x) = -2x^2$;

3) $(-y^2 + 5y)2y - 10y^2(1 - 0,2y^2) = -4y^4$;

4) $(2,5a - b^2)(-4a) + 2a(5a - b^2) = -6ab^2$.

Найдите значение выражения:

1) $(x - 4)(x^2 + 2x - 5) - x^3$ при $x = -\frac{4}{5}$;

2) $(a^2 - a - 9)(2a - 1) - 2a^3$ при $a = \frac{3}{8}$;

3) $24y^3 - 3(8y^2 - 1)(y - 6)$ при $y = \frac{2}{3}$;

4) $40m^3 - (5m^2 - m - 2)(8m - 3)$ при $m = \frac{7}{10}$.

Решите уравнение:

1) $(x^2 + 1)(x - 2) - x^3 = -2x^2$; 2) $(3 - y)(1 - y^2) - 3y^2 = y^3$;

3) $(z - 6)(z + 5) - (z - 2)z = 30$; 4) $3a(a - 3) - a(2 - 3a) = -100{,}59$.

Решите уравнение:

1) $(x - 10)(x - 9) - (x - 8)^2 = 0$;

2) $(x - 11)(x + 9) - (x - 3)(x - 40) = 0$;

3) $(x - 6)(7 - x) + (3 - x)(3 + x) = 0$;

4) $(x - 4)(4 - x) - (1 - x)(9 - x) = 0$.

Решите неравенство:

1) $(a - 6)(a + 5) - a^2 \leqslant 0$; 2) $a^2 - (a - 2)(a + 4) > 0$;

3) $(2a - 1)(a + 4) - 2a^2 < 0$. 4) $3a^2 + (2 - a)(4 + 3a) < 0$.

Докажите тождество:

1) $b(b - 4) + (b - 8)(b - 9) - 2(b - 3)^2 = 9b - 90$;

2) $(c + 2)^2 - (c - 4)(3 - c) - 0{,}5(4c^2 - 1) = 16{,}5 - 3c$;

3) $(d - 1)(d^2 + d + 1) - d(d^2 - 3) = 3d^2 - 4$;

4) $(k - 7)(k + 6) + 2(k - 2)^2 - (k - 3)^2 = 3k - 41$.

Рассмотрим деление одночлена на одночлен с помощью примера.

Пример. Разделим одночлен $40xy^3$ на одночлен $0{,}5y^2$. Для этого запишем частное $40xy^3 : (0{,}5y^2)$ в виде дроби $\frac{40xy^3}{0{,}5y^2}$. Сократим дробь на 0,5 и применим свойства степени: $y^3 : y^2 = y$. Тогда получим $80xy$.

Ответ: $80xy$.

Значит,

чтобы разделить одночлен на одночлен, нужно записать частное в виде дроби и сократить ее.

Рассмотрим деление многочлена на одночлен с помощью примера.

Разделим многочлен $-3{,}6a^2b^2 + 3a^2b + 44a^4b^4$ на $-4a^2b$. Для этого используем правило деления суммы на число. Чтобы сумму разделить на число, надо на это число разделить каждое слагаемое и полученные результаты сложить.

Поскольку значением любого одночлена является число, то разделим каждое слагаемое (значит, каждый член многочлена) на число, т. е. на одночлен. Получим:

$(-3{,}6a^2b^2 + 3a^2b + 44a^4b^4) : (-4a^2b) = -3{,}6a^2b^2 : (-4a^2b) + 3a^2b : (-4a^2b) + 44a^4b^4 : (-4a^2b) = \frac{-3{,}6a^2b^2}{-4a^2b} + \frac{3a^2b}{-4a^2b} + \frac{44a^4b^4}{-4a^2b} = 0{,}9b - 0{,}75 - 11a^2b^3$.

Ответ: $0{,}9b - 0{,}75 - 11a^2b^3$.

Значит,

чтобы разделить многочлен на одночлен, нужно каждый член многочлена разделить на этот одночлен и полученные результаты сложить.

Примечание:

1. Если при делении многочлена на одночлен получится многочлен (как это было в рассмотренных выше примерах), то в таких случаях

3) $2{,}1ab^{[illegible]} : \left(\frac{[illegible]}{3}b^{2}\right) - 2{,}7ab^{[illegible]} : \left(\frac{8}{9}b^{3}\right)$;

4) $6\frac{[illegible]}{[illegible]}c^{[illegible]}d : \left(2\frac{1}{2}cd\right) + 8\frac{[illegible]}{[illegible]}cd^{[illegible]} : \left(5\frac{1}{2}cd^{2}\right)$.

Найдите значение выражения:

1) $100b^{[illegible]} : 4b^{[illegible]} - 5b$ при $b = 0{,}2$;

2) $99c - 2c^{[illegible]} : 0{,}2c^{[illegible]}$ при $c = -\frac{1}{5}$;

3) $68t^{[illegible]} : (3{,}4t^{[illegible]}) - t$ при $t = -\frac{[illegible]}{[illegible]}$;

4) $-21{,}4y + 7y^{[illegible]} : (5y^{[illegible]})$ при $y = -0{,}03$.

Сравните значения выражений:

1) $76a^{[illegible]}b^{[illegible]} : (38ab)$ и $3ab$ при $a = -2,\ b = 3$;

2) $-5xy$ и $105x^{[illegible]}y^{[illegible]} : (-21x^{[illegible]}y)$ при $x = 0{,}2,\ y = 7$;

3) $a^{[illegible]}b^{[illegible]} : (a^{[illegible]}b^{[illegible]})$ и $a^{[illegible]}b^{[illegible]} : (a^{[illegible]}b^{[illegible]})$ при $a = -2,\ b = -2$;

4) $33c^{[illegible]}d^{[illegible]} : (1{,}1c^{[illegible]}d)$ и $20cd$ при $c = 0{,}5,\ d = -0{,}1$.

Докажите тождество:

1) $(2[illegible]x^{[illegible]}y^{[illegible]} - 55x^{[illegible]}y^{[illegible]}) : (5x^{[illegible]}y^{[illegible]}) = 11 - 40xy$;

2) $[illegible],1a - (12{,}1a^{[illegible]}b^{[illegible]} - 44a^{[illegible]}b^{[illegible]}) : (11a^{[illegible]}b^{[illegible]}) = 4$;

3) $[illegible],3s^{[illegible]} : (0{,}[illegible]4s^{[illegible]}) - 11{,}22s = [illegible],22s$;

4) $(8{,}47n^{[illegible]}m^{[illegible]} - 77n^{[illegible]}m^{[illegible]}) : (7{,}7n^{[illegible]}m^{[illegible]}) - 10 = 1{,}1nm$.

Упростите выражение:

1) $\left(\frac{[illegible]}{2}a^{[illegible]}b^{[illegible]} - 0{,}3a^{[illegible]}b^{[illegible]}\right) : \left(\frac{1}{6}a^{[illegible]}b^{[illegible]}\right)$;

2) $(15{,}2x^{[illegible]}y^{[illegible]} - 5{,}2x^{[illegible]}y^{[illegible]}) : (0{,}2x^{[illegible]}y^{[illegible]})$.

Найдите значение выражения:

1) $90a^{[illegible]}b^{[illegible]} : (18a^{[illegible]}b) - 0{,}14a^{[illegible]} : (7ab)$ при $a = -5,\ b = 2$;

2) $4{,}95x^{[illegible]}y^{[illegible]} : (2{,}2x^{[illegible]}y^{[illegible]}) - 77x^{[illegible]}y^{[illegible]} : (0{,}11x^{[illegible]}y^{[illegible]})$ при $x = \frac{[illegible]}{7},\ y = -\frac{1[illegible]}{15}$.

Сравните значения выражений:

1) $6a^{[illegible]}b^{[illegible]} : (0{,}5ab)$ и $8ab^{[illegible]} : (0{,}2ab)$ при $a = 2,\ b = -3$;

2) $3{,}5n^{[illegible]}m : (7nm)$ и $5{,}7nm^{[illegible]} : (19m^{[illegible]})$ при $n = [illegible]1,\ m = -1$.

В предыдущем параграфе вы узнали, что при умножении многочлена на одночлен или на многочлен получается многочлен. Иногда решают обратную задачу, а именно: данный многочлен представляют в виде произведения нескольких одночленов и многочленов, т. е. выполняют *разложение данного многочлена на множители*.

Рассмотрим разложение многочлена на множители с помощью примеров.

Пример 1. Многочлен $8xy - \frac{2}{3}xz + 1,7x$ можно разложить на множители, так как все члены данного многочлена имеют общий множитель x. Поэтому, применяя распределительное свойство умножения, этот множитель вынесем за скобки. Получим:

$$x(8y - \frac{2}{3}z + 1,7).$$

Ответ: $x(8y - \frac{2}{3}z + 1,7)$.

Пример 2. Разложим на множители многочлен

$$14mn^2 - 49mn^3 + 35mn^4.$$

Коэффициенты каждого члена данного многочлена — целые числа, поэтому для нахождения общего множителя сначала найдем наибольший общий делитель коэффициентов членов многочлена. Затем рассмотрим буквенную часть. Она представляет собой произведение степеней. Среди степеней с одинаковыми основаниями найдем степени с наименьшими показателями. В многочлене $14mn^2 - 49mn^3 + 35mn^4$ число 7 есть наибольший общий делитель чисел 14, 49, 35, а степенями с наименьшими показателями являются m и n^2. Поэтому общим множителем является одночлен $7mn^2$. Вынесем этот общий множитель за скобки. Тогда получим:

$$14mn^2 - 49mn^3 + 35mn^4 = 7mn^2(2 - 7n + 5n^2).$$

Ответ: $7mn^2(2 - 7n + 5n^2)$.

Правильность разложения многочлена на множители можно проверить умножением многочлена, заключенного в скобках, на общий множитель.

В некоторых многочленах общим множителем для всех членов является не одночлен, а многочлен.

$y\left(\frac{2}{3} - y\right)$. Тогда получим: $y\left(\frac{2}{3} - y\right)(y + 5) = 0$. Корнями этого уравнения являются числа: 0; $\frac{2}{3}$; -5. Записывают: $\left\{0; \frac{2}{3}; -5\right\}$.

Ответ: 1) $\{0; -0,41\}$; 2) $\left\{0; \frac{2}{3}; -5\right\}$.

Разложите на множители многочлены

1) $15ab - 8ac + \frac{2}{7}ad$;
2) $-\frac{3}{8}xy + 0,9xz - 15x$;
3) $0,1mn + 2mk - 4m$;
4) $12tk - 8tx - 7t$;
5) $\frac{3}{4}at + 0,17ax - 5a$;
6) $-\frac{6}{5}dx + \frac{3}{11}dy - 21d$.

1) $3ab + 9ac + 27ad$;
2) $4xy + 8xz - 16x$;
3) $0,2mn - 0,8mk + 1,6m$;
4) $9tk - 18tx + 27t$;
5) $0,75at + \frac{3}{4}ax - \frac{9}{16}a$;
6) $-\frac{2}{3}dx + \frac{4}{9}dy - \frac{8}{9}d$.

1) $16a^2b^3 - 32ab^2 + 64abc$;
2) $9x^3y^3 - 27x^2yz + 54xy^2$;
3) $\frac{3}{16}a^4bc + \frac{7}{32}a^3bc - \frac{9}{64}a^4b^2c$;
4) $\frac{5}{9}x^5y^2z^3 + \frac{11}{27}x^6y^3z^2 - \frac{11}{54}x^7y^4z$.

1) $0,125m^2n^3 - 0,25mn + 0,625m^2n$;
2) $328t^2k^2 + 32t^2k^2$;
3) $0,09m^5n^5 + 0,27m^3n^8 - 0,09m^5n^5$;
4) $1,6t^{11}k^4 - 3,2t^{10}k + 0,8t^9k$;
5) $14m^4 - 49m^2nk + 7m^2n$;
6) $-8t^5k^3y + 64t^3k^5 - 4t^3k^8$.

1) $12(a + b) - c \cdot (a + b) + 5d(a + b)$;
2) $14(m - n) + x(m - n)$;

3) $1{,}5(x-y)+x(x-y)-y(x-y)+(x-y)$;

4) $(l-5)-8x(l-5)$;

5) $(c-d)x+(c-d)y-5(c-d)-5xy(c-d)$.

1) $5a(3a-8)-3b(3a-8)+9ab(3a-8)-(3a-8)$;

2) $y(7x-y)-x(7x-y)+7xy(7x-y)+(7x-y)$;

3) $(a-b)^2(x-y)-x(a-b)^2-y(a-b)^2-(a-b)^2$;

4) $m(m-n^2)-n(m-n^2)-n(m-n^2)-m^2(m-n^2)$.

1) $4b(7-8a)+a(8a-7)-(14-16a)+(7-8a)ab$;

2) $3x(5y-4)-y(4-5y)+(15y-12)-3xy(4-5y)$;

3) $m(m-3n)-n(m-3n)-n(m-3n)-8(6n-2m)$;

4) $\left(-\frac{2}{3}l+m\right)x-\left(k-\frac{2}{3}l\right)y+(3k-2l)xy-(-2l+3m)$.

Решите уравнения

1) $x^2+6x=0$; 2) $x^2-5x=0$;

3) $\frac{7}{8}x+x^2=0$; 4) $\frac{12}{13}x-x^2=0$;

5) $x+\frac{1}{4}x^2=0$; 6) $x-\frac{7}{9}x^2=0$;

7) $\frac{1}{25}x+\frac{1}{125}x^2=0$; 8) $\frac{1}{19}x-\frac{1}{361}x^2=0$.

1) $z(2z-5)-5(2z-5)=0$; 2) $3(z-4)-7z(z-4)=0$;

3) $z(0{,}5z-5)=6(5-0{,}5z)$; 4) $z(8-z)+z-8=0$.

Разложите на множители многочлен

1) $(0{,}16a+0{,}32b)a-(0{,}64b+1{,}28a)b$;

2) $(0{,}09a-0{,}81b)b-(0{,}81b-7{,}29a)a$;

3) $(4{,}9x-3{,}43y)\cdot xy-(3{,}43y-4{,}9x)\cdot 4$;

4) $\left(\frac{7}{9}ab-k\right)\cdot a-\left(k-\frac{7}{9}ab\right)\cdot k-\left(k-\frac{7}{9}ab\right)\cdot b$;

5) $(2{,}5xy-1{,}25m)-(1{,}25m-2{,}5xy)y-(1{,}25m+2{,}5xy)x$.

1) $\left(\frac{2}{3}xy-1\right)xy-\left(1-\frac{2}{3}xy\right)$;

2) $\left(\frac{1}{9}x-c\right)\frac{1}{9}-y\left(c-\frac{1}{9}x\right)$;

3) $\left(\frac{25}{49}x^2 + 1\right)y + \left(1 + \frac{25}{49}x^2\right)$;

4) $\left(1\frac{8}{19}y^2 + 15x^2\right)x + y\left(15x^2 + 1\frac{8}{19}y^2\right)$.

Разложите на множители:

1) $\left(\frac{121}{144}mnx + \frac{22}{24}mx\right) - n\left(\frac{11}{12}n + 2\right) + \left(4 + 1\frac{5}{6}n\right)\cdot\frac{1}{2}$;

2) $(169abc - 196cbax) + (13^2y - 14^2yx) - (14^2x - 13^2)$;

3) $(225x^2yz^3 - 289yz) - (15^2x^2z^2 - 17^2) + (17^2 - 225x^2z^2)$;

4) $(450tk^3 - 225k^2) + t(8t^2k - 4t) - 2\cdot(\frac{1}{2} - tk)$.

Решите уравнения

1) $(7x - 5)x = (1,5 - 2,1x)$;

2) $(1 - 8x)x = (11,2x - 1,4)$;

3) $\left(1,7x - \frac{1}{3}\right)x = (3 - 15,3x)\cdot\frac{1}{2}$;

4) $\left(\frac{x}{7} - 1\frac{6}{7}\right)x = (3,9 - 0,3x)\cdot\frac{1}{35}$.

1) $(14x^2 - 49x)x - (2x - 7)\cdot 8x = 0$;

2) $(125x - 25x^2)\cdot 9x - (15x - 3x^2)\cdot x = 0$;

3) $(0,81y^2 - 0,9y)\cdot 0,9y = (0,1 - 0,09y)\cdot 10y$;

4) $\left(\frac{3}{4}y^2 - \frac{9}{16}y\right)\cdot 8y = \frac{1}{7}y^2 - \frac{3}{28}y$.

[illegible]

Можно ли многочлен разложить на множители, если не все его члены имеют общий множитель? Такие многочлены встречаются очень часто. Для разложения многочлена на множители, у которого не все члены имеют общий множитель, сначала нужно его члены сгруппировать так, чтобы в каждой группе оказались слагаемые с общим множителем.

Как разложить на множители многочлен $20a - 4ab + 5c - bc$?

$20a - 4ab + 5c - bc = (20a + 5c) + (-4ab - bc) = 5(4a + c) - b(4a + c) = (4a + c)(5 - b)$.

Ответ: $(4a + c)(5 - b)$.

Вы уже заметили, что выполненные преобразования были основаны на применении переместительного, сочетательного и распределительного свойств сложения и умножения.

Группировку членов многочлена можно проводить разными способами.

Например, разложим на множители многочлен, состоящий из шести членов: $nt - mt - 4t + 5n - 5m - 20$.

Члены данного многочлена можно сгруппировать двумя способами:

1) по два, тогда получим:

$nt - mt - 4t + 5n - 5m - 20 = (nt + 5n) - (mt + 5m) - (4t + 20) = n(t + 5) - m(t + 5) - 4(t + 5) = (t + 5)(n - m - 4)$.

2) по три, тогда получим:

$nt - mt - 4t + 5n - 5m - 20 = (nt - mt - 4t) + (5n - 5m - 20) = t(n - m - 4) + 5(n - m - 4) = (t + 5)(n - m - 4)$.

Ответ: $(t + 5)(n - m - 4)$.

Таким образом,

для разложения многочлена на множители способом группировки используется следующий алгоритм:

1) нужно распределить члены многочлена в такие группы слагаемых, которые имеют общий множитель;

2) вынести этот общий множитель в каждой группе за скобки;

3) вынести общий множитель в полученной алгебраической сумме.

Решите уравнение, разложив левую часть на множители:

1) $x^2 - 9x + 8 = 0$;
2) $x^2 + 3x + 2 = 0$;
3) $x^2 + x - 6 = 0$;
4) $x^2 - x - 6 = 0$;
5) $x^2 + 3x - 4 = 0$;
6) $x^2 - 3x - 4 = 0$.

Разложите на множители способом группировки многочлен:

1) $2am - 2bm + 2cm - 3an + 3bn - 3cn$;
2) $3mx - 3nx + 3bx - 2my + 2ny - 2by$;
3) $7ax - 7ay - 7az + 4bx - 4by - 4bz$;
4) $11at + 11ak - 11ay - 9bt - 9bk + 9by$.

Решите уравнение, разложив на множители выражение, стоящее в скобках:

1) $(x^2 - 3x + 2)(x^2 - 7x + 12) = 0$;
2) $(2 - 3x + x^2)(12 + 7x + x^2) = 0$;
3) $(1 - 2x^2 - x)(5 - 10{,}5x + x^2) = 0$;
4) $(12 - 7x + x^2)(5x - 1 - 6x^2) = 0$.

Тождественные преобразования выражений рассмотрим на примерах.

Пример 1. Упростим выражение

$$(5x - 2)(3x^2 + 2x - 9) - 7\left(\frac{4}{7}x^2 - 7x\right) - 16x^3.$$

Решение. Для упрощения данного выражения используем правило умножения многочлена и одночлена на многочлен, затем — приведение подобных слагаемых:

$$(5x - 2)(3x^2 + 2x - 9) - 7\left(\frac{4}{7}x^2 - 7x\right) - 16x^3 = \underline{15x^3} + 10x^2 - 45x -$$
$$- 6x^2 - 4x + 18 - 4x^2 + 49x - \underline{16x^3} = 18 - x^3.$$

Ответ: $18 - x^3$.

Пример 2. Представим алгебраическую сумму $7a^2b - 6ab - 21ab^3 + 18b^3$ в виде произведения.

Решение. Чтобы представить данную алгебраическую сумму в виде произведения, вынесем общий множитель за скобки и применим способ группировки:

$$7a^2b - 6ab - 21ab^3 + 18b^3 = b(7a^2 - 6a - 21ab^2 + 18b^2) =$$
$$= b((7a^2 - 21ab^2) + (18b^2 - 6a)) = b(7a(a - 3b^2) + 6(3b^2 - a)) =$$
$$= b(a - 3b^2)(7a - 6).$$

Ответ: $b(a - 3b^2)(7a - 6)$.

Пример 3. Найдем наименьшее целое число, при котором верно неравенство: $(4x + 1)(5 - 6x) - 3x < (2 - 3x)(8x + 1)$.

Решение. Воспользуемся правилом умножения многочлена на многочлен и правилами, гарантирующими равносильность линейных неравенств с одной переменной.

$20x + 5 - 24x^2 - 6x - 3x < 16x - 24x^2 - 3x + 2,$

$11x + 5 - 24x^2 < 13x - 24x^2 + 2,$

$11x - 24x^2 - 13x + 24x^2 < 2 - 5,$

$-2x < -3,$

$x > 1{,}5.$

Рис. 17.1

Решением неравенства $x \geqslant -1,5$ являются все числа, которые больше или равны $-1,5$, т. е. все числа числового луча $[-1,5; +\infty)$ (рис. 17.1). Значит, наименьшее целое число, при котором верно неравенство, это число -1.

Ответ: -1.

Упростите выражения:

1) $(x^{[illegible]} - 2)(x^{[illegible]} - 1) - x^{[illegible]} + 2x^{[illegible]}$;

2) $a^{[illegible]} - 9a^{[illegible]} - (a^{[illegible]} - 3)(a^{[illegible]} + 3)$;

3) $(x^{[illegible]} + [illegible])(x^{[illegible]} - 2) - 10 - x^{[illegible]}$;

4) $a^{[illegible]} - 14a^{[illegible]} - (a^4 - 14)(a^{[illegible]} - 1)$.

1) $0,5a^{[illegible]}c^{[illegible]}(a^{[illegible]} - c^{[illegible]} + 6) - 0,5a^{[illegible]}c^{[illegible]} - 0,5a^{[illegible]}c^{[illegible]}$;

2) $4,8x^{[illegible]}y^{[illegible]} - (1,2xy^{[illegible]} - [illegible]) - 2,4x^{[illegible]}y^{[illegible]}(2x^{[illegible]}y^{[illegible]} - 5y + 3)$;

3) $2,5t^{[illegible]}s^{[illegible]}([illegible]t^{[illegible]} - 6c^2 - 2) - 15t^{[illegible]}c^{[illegible]}s^{[illegible]} - 10t^{[illegible]}s^{[illegible]}$;

4) $9a^{[illegible]}b^{[illegible]} - 1,8a^{[illegible]}b^{[illegible]} - 0,9a^7c^5(10a^{[illegible]}b^{[illegible]} + 2a5b^{[illegible]})$.

Найдите значения выражений:

1) $5x^{[illegible]} : x^{[illegible]} - 14x$ при $x = -1$;

2) $-33y^{[illegible]} : y - 37y^{[illegible]}$ при $y = 0,5$;

3) $15z^{[illegible]} : z^{[illegible]} - 160z^{[illegible]}$ при $z = -0,5$;

4) $250t^{[illegible]} : t^{[illegible]} - 6t^{[illegible]}$ при $t = -4$.

1) $0,07a^{[illegible]}b^{[illegible]} : a - 0,03a^{[illegible]}b^{[illegible]} : (ab^{[illegible]})$ при $a = 7$, $b = -2$;

2) $2,5x^{[illegible]}y : x^{[illegible]} - 2,6x^{[illegible]}y : x$ при $x = -1$, $y = 10$;

3) $47,3t^{[illegible]}z^{[illegible]} : (t^{[illegible]}z) - 2,7t^{[illegible]}z^{[illegible]} : (t^{[illegible]}z^{[illegible]})$ при $z = 0,2$, $t = -3$;

4) $-9,4a^{[illegible]}b^{[illegible]} : a^{[illegible]} - 0,6a^{[illegible]} : (ab^{[illegible]})$ при $a = 1$, $b = [illegible]$.

[illegible]

1) [illegible]
2) [illegible]

3) [illegible]
4) [illegible]

[illegible]

2) [illegible]
3) [illegible]
4) [illegible]

Решите уравнение:

1) [illegible]
2) [illegible]
3) [illegible]
4) [illegible]

1) [illegible]
2) $(3,5 - x)(7x - 2)$ [illegible]
3) [illegible]
4) [illegible]

[illegible]

1) [illegible]
2) [illegible]
3) [illegible]
4) [illegible]

[illegible] A [illegible] B [illegible]

[illegible]

1) [illegible]
2) [illegible]
3) [illegible]
4) [illegible]

[illegible]

1) [illegible]
2) [illegible]
3) [illegible]
4) [illegible]

Найдите значение выражения:

1) [illegible] $(1{,}5a + 1{,}3a^2)$ [illegible] $10ab^2$ при $a = 0{,}2$, $b = 0{,}5$, c [illegible];

2) [illegible] $(10xyz^2 - 9) : (20x^2y^2) - 0{,}10xy$ при $x = -1$, $y = 5$, z [illegible].

Найдите корень уравнения:

1) [illegible] $5)(x - 5) - 25 = 2x - x^2(x - 5)$;

2) $(6 - x^2)(7 - x) - 15x - 63 = x^2(x - 7)$;

3) $(2 - x)x^2 - 15x - 11 = (x^2 - 13)(2 - x)$;

4) $99 - 28x + x^2(x - 9) = (17 - x^2)(x - 9)$.

Решите неравенство:

1) [illegible] $2)(x + 1)$ [illegible] $x^3 - 28$;

2) [illegible] 19 [illegible] $(10 - x)(5 + x) + 5x^2$;

3) $(x^2 - 4x + 8) \cdot 5$ [illegible] $2x(2{,}5x - 4)$;

4) [illegible] $x + 2)$ [illegible] $0{,}1x(33x - 10) - 6$.

Найдите наименьшее целое число, при котором верно неравенство:

1) [illegible] $8x - 5(x - 3)$ [illegible] $7x - 1$;

2) [illegible] $8)(1 + y)$ [illegible] $2{,}1 - 5y$ [illegible] $6y$;

3) [illegible] $2{,}8$ [illegible] $2{,}2 + (6 - x)(1{,}2 + x) + 0{,}2x - 11{,}5$;

4) [illegible] $2{,}2x - 7{,}15$ [illegible] $0{,}5x$ [illegible] $1{,}7 - x + x^2)(0{,}5 - x) + x^3$.

Найдите наибольшее целое число, при котором верно неравенство:

1) [illegible] $7x$ [illegible] $x^2(7 - x^2) - 1{,}8$;

2) [illegible] $1)$ [illegible] $6x - 15x^2 - 33 - 2x(2x$ [illegible];

3) [illegible] $(2x^2 - 3)$ [illegible] $4 - 2x$ [illegible] $21x^2$;

4) [illegible] $(10x - 3) - 135 + 1{,}5x(20x$ [illegible] $27x^2$.

A. $\frac{2m}{n^2}$; B. $\frac{m^2}{2n}$; C. $\frac{m}{n^2}$; D. $\frac{2m^2}{n}$.

Решите уравнение $(t^2 + 8t - 9) - (t^2 - 11t + 10) = 18t - 20$:

A. $-0{,}5$; B. 2; C. -1; D. 1.

Упростите выражение $-0{,}8c \cdot (c + 5) - 0{,}7(10c + 5) + 0{,}8c^2 + 10c - 4$:

A. $1{,}6c^2 - c - 7{,}5$; B. $-c - 7{,}5$;

C. $-c - 0{,}5$; D. $-19c - 7{,}5$.

Упростите выражение $81m^9n^8 : (24m^8n^5)$ и найдите его значение при $m = 32$, $n = -\frac{1}{3}$:

A. -12; B. 12; C. 4; D. -4.

Известно, что $2(a + 1)(b + 1) = (a + b)(a + b + 2)$.

Найдите $a^2 + b^2$:

A. 1; B. 3; C. 4; D. 2.

Найдите значение выражения $(125a^3 - 25a^2) : (5a^2) - (25a^2 \quad 2a^2) : a$ при $a = 5$:

A. 5; B. -5; C. 10; D. -15.

Преобразуйте произведение $(n^2 - n - 1)(n^2 - n + 1)$ в многочлен стандартного вида:

A. $2n^2 - n$; B. $n^4 - 2n^2 - 1$;

C. $n^4 + 2n^2 + n + 1$; D. $n^4 - 2n^3 + n^2 - 1$.

Найдите наибольшее положительное целое число, которое удовлетворяет неравенству $3x(x - 2) - (3x - 1)(x + 4) \geqslant 8(2 - x)$:

A. 0; B. -1; C. 1; D. -2.

Разложите на множители $3a + 3a^2 - b - ab$:

A. $(3a - b)(1 - a)$; C. $(a - 3b)(1 + a)$;

B. $(3a - b)(1 + a)$; D. $(3a + b)(a - 1)$.

Что такое *функция*, ее определение и множество значений? Какие бывают функции?

Рассмотрим величины цену и стоимость. Эти величины взаимосвязаны между собой: увеличение цены ведет к обязательному увеличению стоимости. То же самое можно сказать и про некоторые другие величины. *Например*, время движения и скорость. Чем больше скорость, тем меньше будет затрачено времени на прохождение одного и того же пути.

Зависимость стоимости C от цены m можно выразить формулой $C = k \cdot m$, где k — количество. Каждому значению цены соответствует единственное значение стоимости. *Например*, при $k = 3$ шт:

если $m = 5$ тг/шт., то $C = 15$ тг;

если $m = 10$ тг/шт., то $C = 30$ тг;

если $m = 20$ тг/шт., то $C = 60$ тг.

Зависимость времени движения t от скорости v можно выразить формулой $t = \frac{s}{v}$, где s — длина пройденного пути. Каждому значению скорости соответствует единственное значение времени. *Например*, при $s = 120$ км:

если $v = 40$ км/ч, то $t = 3$ ч;

если $v = 60$ км/ч, то $t = 2$ ч;

если $v = 12$ км/ч, то $t = 10$ ч.

В рассмотренных примерах каждому значению одной переменной величины соответствует единственное значение другой переменной величины. Такую зависимость одной переменной величины от другой называют *функциональной зависимостью*, или *функцией*.

Одна из этих пар переменных величин в рассмотренных примерах является *зависимой переменной*, ее называют *значением функции*, или *функцией* и обычно обозначают буквой y. Другая из этих пар переменных величин является *независимой переменной*, ее называют *аргументом* и обычно обозначают буквой x.

В наших примерах стоимость и время движения — зависимые переменные, а цена и скорость движения — независимые переменные.

Функцией называется такая зависимость переменной y от переменной x, при которой каждому значению переменной x соответствует единственное значение переменной y.

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют область определения функции.

Так, в примере, где рассматривалась зависимость стоимости C от цены m, независимая переменная m принимала значения 5, 10, 20. Все эти значения образуют область определения функции C.

Зависимая переменная C принимала значения 15, 30, 60. Все эти значения образуют множество значений функции.

В примере, где рассматривали зависимость времени движения t от скорости v, независимая переменная v принимала значения: 40, 60, 12. Все эти значения образуют область определения функции t.

Зависимая переменная t принимала значения 3, 2, 10. Все эти значения образуют множество значений функции.

Если при рассмотрении функции не указываются конкретные значения независимой переменной, то ее область определения функции принимает все допустимые значения независимой переменной.

Например, для функции $y = 30x$ допустимыми значениями переменной являются любые числа, поэтому областью определения будет числовой промежуток $(-\infty; +\infty)$; а для функции $y = \frac{20}{x}$ допустимыми значениями переменной являются все числа, кроме нуля, так как делить на нуль нельзя, поэтому областью определения будет числовой промежуток $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Функция называется *возрастающей* на множестве D, если каждому большему (меньшему) значению аргумента из этого множества соответствует большее (меньшее) значение функции.

Функция называется *убывающей* на множестве D, если каждому большему (меньшему) значению аргумента из этого множества соответствует меньшее (большее) значение функции.

Например, функция цены от стоимости является возрастающей, так как при увеличении цены увеличивается и стоимость; функция скорости от времени является убывающей, так как при увеличении скорости движения уменьшается время, затраченное на прохождение этого пути.

Рассмотрим пример, когда функция не является возрастающей. В первый день ученик прочитал 15 страниц, во второй, третий, четвертый дни он не читал книги, в пятый день прочитал 20 страниц, в шестой день — оставшиеся 30 страниц. Тогда функция, задающая количество прочитанных страниц книги за k дней, не является возрастающей: увеличение количества дней не увеличивает количество прочитанных страниц книги. Ведь за один день он прочитал 15 страниц, за 2 дня — 15 страниц, за 3 дня — 15 страниц, за 4 дня — 15 страниц и т. д.

Подберите независимую переменную для зависимой переменной, которой является:

1) периметр квадрата;

2) площадь квадрата;

3) скорость движения;

4) цена товара;

5) периметр прямоугольника;

6) площадь прямоугольника;

7) объём куба;

8) объём прямоугольного параллелепипеда.

Подберите зависимую переменную для независимой переменной, которой является:

1) количество купленного товара;

2) время движения;

3) скорость движения;

4) периметр квадрата.

Является ли функцией зависимость между величинами:

1) производительностью труда и выполненной работой за некоторое время;

2) выполненной работой за некоторое время и производительностью труда;

3) переменной x и ее модулем;

4) модулем переменной x и переменной x ?

Докажите, что зависимость является функцией:

1) периметра пятиугольника, у которого все стороны равны, от длины его стороны;

2) массы пяти одинаковых ящиков с фруктами от массы фруктов, находящихся в одном ящике;

3) стоимости десяти одинаковых карандашей от стоимости одного карандаша;

4) количества учебников у учащихся от количества учащихся.

Найдите область определения функции:

1) периметра многоугольника с равными сторонами от длины его стороны;

2) состояния воды от температуры.

Какие из следующих функций возрастающие, а какие убывающие:

1) зависимость длины стороны квадрата от его площади;

2) зависимость времени, затраченного на выполнение работы, от производительности.

Длина стороны квадрата принимает значения 2 см $\leqslant a \leqslant$ 5 см. В каких числовых значениях изменяется:

1) периметр квадрата;

2) площадь квадрата?

Что можно сказать про периметр P квадрата, длина стороны которого равна a см, если:

1) $a \leqslant 4$ см;	2) $a \geqslant 3$ см;	3) $a \leqslant 2{,}5$ см;
4) $a \geqslant 1{,}75$ см;	5) 3 см $\leqslant a \leqslant$ 5 см;	6) 1,25 см $\leqslant a \leqslant$ 1,75 см;

[illegible]

Функция может быть задана различными способами.

Задать функцию — значит показать, как для заданных значений аргумента найти соответствующие значения функции.

Функцию можно задать формулой.

Способ задания функции с помощью формулы называется *аналитическим способом задания функции*.

Например, рассмотрим формулу пути, пройденного с постоянной скоростью [illegible]. Если изменять скорость v, то за одно и то же время длина пройденного пути будет меняться. Значит, в данном примере скорость — это независимая переменная, ее обозначим через x. Длина пройденного пути — зависимая переменная. Ее обозначим через y. Когда время движения не изменяется — 2 ч. Тогда зависимость длины пройденного пути от скорости движения задается формулой $y = 2x$.

Если формула задает, что каждому значению аргумента x (скорости) соответствует единственное значение функции y (длины пройденного пути), то эта формула $y = 2x$ задает функцию.

По этой формуле по значению каждого аргумента x можно найти соответствующее значение функции y.

Например, если x принимает значения 40 км/ч, 45 км/ч, 50 км/ч, 60 км/ч, то соответствующие значения функции $y = 2x$ равны 80 км, 90 км, 100 км, 120 км. Их найдем, подставляя соответствующие значения 40; 45; 50; 60 вместо x в формулу $y = 2x$.

Также, используя формулу $y = 2x$, по заданному значению функции можно найти соответствующее значение аргумента.

Например, если функция y принимает значения 86 км, 94 км, 98 км, то соответствующие значения аргумента x равны 43 км/ч, 47 км/ч, 49 км/ч. Их можно найти, подставляя соответствующие значения 86; 94; 98 вместо y в формулу $y = 2x$.

[illegible] аналитического способа задания функции. Формула $y = 2x$ [illegible] формулу [illegible], [illegible] значения функции. В этом примере [illegible].

С помощью формулы можно узнать, является ли функция возрастающей или убывающей.

Например, докажем, что функция $y = 3x - 5$ – возрастающая. Действительно, по определению, функция возрастающая, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции.

Пусть $x_1 > x_2$. Найдем y_1 и y_2. Получим: $y_1 = 3x_1 - 5$ и $y_2 = 3x_2 - 5$. Рассмотрим разность $y_1 - y_2$. Для этого в выражение $y_1 - y_2$ вместо y_1 подставим $3x_1 - 5$ и вместо y_2 подставим $3x_2 - 5$.

Получим: $y_1 - y_2 = 3x_1 - 5 - (3x_2 - 5)$. Раскроем скобки, приведем подобные слагаемые и вынесем общий множитель за скобки: $3x_1 - 5 - (3x_2 - 5) = 3x_1 - 5 - 3x_2 + 5 = 3x_1 - 3x_2 = 3(x_1 - x_2)$. Поскольку $x_1 > x_2$, то значение разности $x_1 - x_2$ положительно. Если $y_1 - y_2 > 0$, тогда $y_1 > y_2$. Поэтому функция $y = 3x - 5$ возрастающая.

С помощью формулы можно узнать координаты точек, в которых график функции пересекает ось абсцисс.

Например, найдем точку пересечения графика функции $y = 3x - 5$ с осью абсцисс. Поскольку точки, лежащие на оси абсцисс, имеют ординаты, равные нулю, то надо в формулу $y = 3x - 5$ вместо переменной y подставить число 0. Получим уравнение $3x - 5 = 0$, из которого находим x. Получим: $3x = 5$, откуда $x = 1\frac{2}{3}$. Значит, график функции $y = 3x - 5$ пересекает ось абсцисс в одной точке с координатами $(1\frac{2}{3}; 0)$.

С помощью формулы можно узнать, при каких значениях аргумента значения функции положительны или отрицательны.

Например, найдем значения аргумента x, при которых функция $y = 3x - 5$ отрицательна. Для этого составим и решим неравенство: $3x - 5 < 0$. Получим: $3x < 5$, откуда $x < 1\frac{2}{3}$. Значит, функция $y = 3x - 5$ отрицательна для всех x, принадлежащих числовому промежутку $(-\infty; 1\frac{2}{3})$.

Какие из следующих формул задают функцию y от x, а какие нет:

1) $y = -3x + 4$; 2) $y^2 = x$; 3) $x - 8 - 6y = 0$?

Найдите область определения функции:

1) $y = \frac{1}{3}x$; 2) $y = \frac{x}{2}$; 3) $y = \frac{x}{2} + 5$;

4) $y = 5 \cdot (x - 2)$; 5) $y = \frac{3}{x - 2}$; 6) $y = \frac{x(x-2)}{2}$.

Найдите значение функции:

1) $y = \frac{1}{3}x - 8$, если $x = 1782$; 1101; $\frac{2}{3}$; $0,3$;

2) $y = 0,01x - 2,5$, если $x = 25$; 250; $2,5$;

3) $y = \frac{1}{8} \cdot 25\% \cdot x$, если $x = 40$; 100; $\frac{1}{2}$; 8.

Найдите значение аргумента x для функции:

1) $y = \frac{1}{3}x - 8$, если $y = \frac{1}{3}$; $0,5$; 8; 30;

2) $y = 0,01x - 2,5$, если $y = 2,5$; $0,01$; $\frac{1}{25}$;

3) $y = \frac{1}{8} \cdot 25\% \cdot x$, если $y = \frac{1}{4}$; $0,5$; 10.

Для каких значений аргумента x равны нулю значения функции:

1) $y = 12x - 18$; 2) $y = 12x - 3$; 3) $y = 3x + 8$;

4) $y = 5x - 1$; 5) $y = -12x - 18$; 6) $y = 4x - 8$;

7) $y = -2x - 8$; 8) $y = 10x - 2$?

Для каких значений аргумента x являются положительными значения функции:

1) $y = 2x - 8$; 2) $y = -2x - 8$; 3) $y = -2x - 2$;

4) $y = 2x - 2$; 5) $y = 0,1x - 10$; 6) $y = 0,1x + 10$;

7) $y = -0,1x - 10$; 8) $y = 0,1x - 10$?

Поэтому функция, которую задает эта таблица, является возрастающей функцией.

Не всякая таблица задает функцию. *Например*, таблица 20.2 не задает функцию. Действительно, по этой таблице видно, что значению x, равному 1, соответствует не одно, а два значения y: числа 4 и 5. Поэтому данная таблица функцию не задает.

Таблица 20.2

x	0	1	1	2
y	3	4	5	6

Задает ли функцию таблица 20.3:

Таблица 20.3

1)

x	1	2	3
y	0,5	1	1,5

2)

x	−1	−2	1	2
y	1	2	1	2

3)

x	1	2	1
y	−1	−2	1

4)

x	4	2	1
y	0	0	0

Найдите область определения функции y, заданной таблицей 20.4:

Таблица 20.4

1)

x	1	2	3	4
y	1	4	9	16

2)

x	1	4	2	9
y	1	2	1	3

Возрастающей или убывающей является функция, заданная таблицей 20.5:

1)

x	[illegible]	[illegible]	9	12
y	1	2	3	4

2)

x	40	30	[illegible]	[illegible]
y	10	20	[illegible]	[illegible]

3)

x	10	20	30	40
y	5	15	10	20

4)

x	[illegible]	12	13	[illegible]
y	15	[illegible]	[illegible]	[illegible]

5)

x	[illegible]	30	70	60
y	6	12	18	24

6)

x	1	3	[illegible]	[illegible]
y	10	[illegible]	[illegible]	40

7)

x	[illegible]	5	6	7
y	0	[illegible]	4	6

8)

x	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Задайте функцию y формулой с помощью таблицы 20.6.

Таблица 20.6

1)

x	[illegible]	2	3	4
y	[illegible]	6	9	12

2)

x	1	2	[illegible]	[illegible]
y	4	[illegible]	[illegible]	[illegible]

3)

x	1	2	3	4
y	2	5	8	11

4)

x	1	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y	[illegible]	6	[illegible]	12

5)

x	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y	[illegible]	[illegible]	[illegible]	11

6)

x	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y	[illegible]	7	[illegible]	[illegible]

Из каких точек состоит область определения каждой из функций? Какие значения [illegible] ?

Найдите область определения функции, указанной в таблице 20.7, [illegible]

Таблица 20.7

x	[illegible]	[illegible]	2	3	[illegible]	[illegible]	[illegible]
y	1	[illegible]	4	8	16	32	[illegible]

2)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{64}$

3)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	3	9	27	81	243	729

4)

x	0	1	2	3	4	5	6
y	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{81}$	$\frac{1}{243}$	$\frac{1}{729}$

5)

x	−4	−3	−2	−1	0	1	2	3	4	5
y	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25

6)

x	−5	−4	−3	−2	−1	1	2	3	4	5
y	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{4}$	1	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{25}$

7)

x	−3	−2	−1	0	1	2	3
y	−27	−8	−1	0	1	8	27

8)

x	−3	−2	−1	1	2	3
y	$-\frac{1}{27}$	$-\frac{1}{8}$	−1	1	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{27}$

Используя данные таблиц из упражнения задайте функции формулой.

Задайте функцию таблицей с помощью формулы $y = x^4$, если область определения этой функции состоит из чисел:

1) −3; −2; −1; 0; 1; 2; 3; 2) −30; −20; −10; 0; 10; 20; 30;

3) −8; −7; −6; −5; −4; 4) −0,3; −0,2; −0,1; 0; 0,1; 0,2; 0,3;

5) $-\frac{1}{100}$; $-\frac{1}{10}$; $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{100}$; 6) $-\frac{1}{5}$; $-\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{3}$; $-\frac{1}{2}$; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$.

[illegible]

[illegible] графиком [illegible] множества точек [illegible] плоскости. Это множество точек [illegible] быть бесконеч- [illegible] (состоит из нескольких точек). При этом абсциссы этих точек равны значениям независимой переменной (аргументу x), ординаты — значениям зависимой переменной (значениям функции y).

[illegible]

[illegible] графику [illegible] указать, [illegible] соответствует значение [illegible] $= 2$, поскольку [illegible] точки $M(3; 2)$ (рис. 21.1).

[illegible] $= 1$ соответствует значение функции $y = 3$, так как [illegible] точки $B(1; 3)$ (рис. 21.1).

[illegible] соответствует значение функции $y = 1$, так как [illegible] точки $(\ldots 1; 1)$ (рис. 21.1).

[illegible] находит [illegible] значения аргумента и функции. Чтобы найти по [illegible] значение функции, соответствующее аргументу 3, [illegible] перпендикуляр к оси Ox, проходящий через точку с абсциссой [illegible] 3 (рис. 21.2). Затем находят точку пересечения [illegible] графиком функции, в данном случае — точку M. [illegible] находят ординату этой точки. Для этого из точки M [illegible] Oy. [illegible] соответствует [illegible] 2.

[illegible]

Рис. 21.1

Рис. 21.2

По графику функции легко найти ее область определения. Для этого надо найти абсциссы всех точек графика.

Например, область определения функции, изображенной на рисунке 21.3, состоит из чисел −2, −1, 0, 1, 2; областью определения функции, изображенной на рисунке 21.4,*а*, является числовой промежуток [−2; 3], на рисунке 21.4,*б* — числовой промежуток (−∞; +∞).

Рис. 21.3

[illegible]

С помощью графика можно легко установить, возрастает или убывает функция.

Например,

1) функция, изображенная на рисунке 21.3, не является ни возрастающей, ни убывающей, так как с увеличением аргумента x (от −1 до 0) значение функции не изменилось (не увеличилось и не уменьшилось), осталось равным нулю;

2) функция, изображенная на рисунке 21.4,*а*, является возрастающей — при движении по графику слева направо "поднимаемся вверх";

3) функция, изображенная на рисунке 21.4,*б*, является убывающей — при движении по графику слева направо "опускаемся вниз".

Рассмотрим график функции, изображенный на рисунке 21.5. По рисунку видно, что функция, изображенная на нем, на всей области ее определения (−∞; +∞) не является ни возрастающей, ни убывающей. Легко заметить, что по одной части графика при движении по нему слева направо "опускаемся вниз", по другой — "поднимаемся вверх". В этом случае говорят, что на промежутке (−∞; 1] функция убывает, а на промежутке [1; +∞) функция возрастает.

Рис. 21.4

По рисунку видно, что одному значению переменной x соответствует *не одно*, а несколько значений переменной y. *Например*, $x = 0$ соответствуют четыре значения переменной y: -1; 0; 1 и 2 (рис. 21.6, *а*); $x = 1$ соответствуют два значения переменной y: 1 и -1 (рис. 21.6, *б*); $x = 1$ соответствуют три значения переменной y: 1; 2; 3 (рис. 21.6, *в*).

Задает ли функцию график, изображенный на рисунке 21.7?

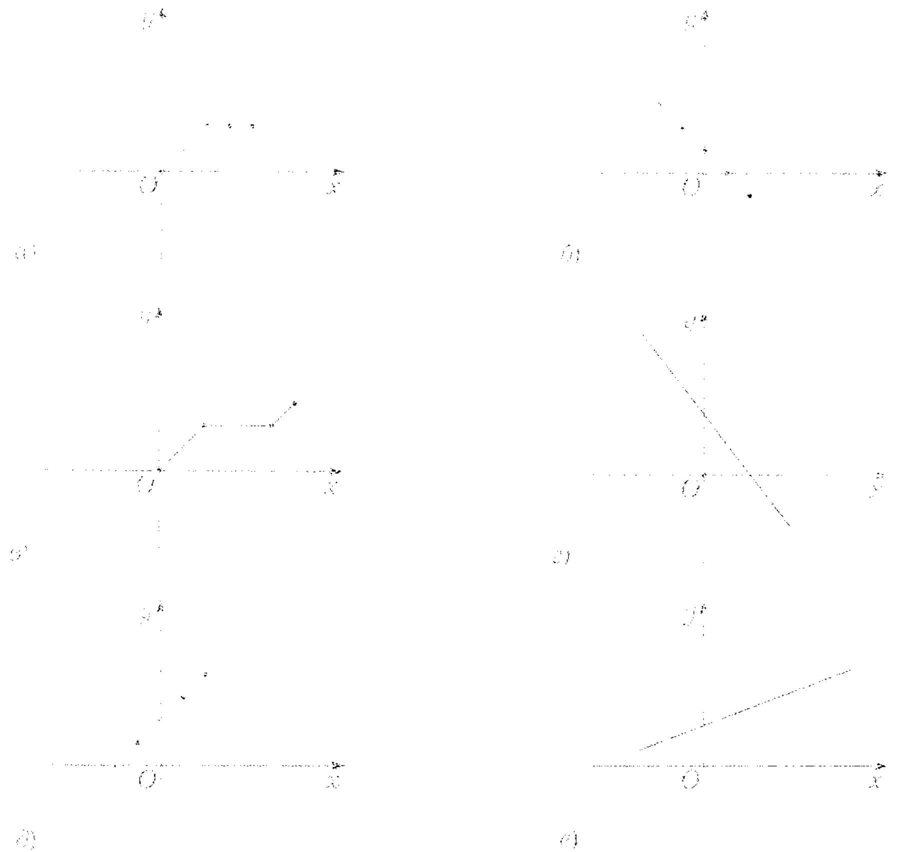


Рис. 21.7

Найдите область определения функции по ее графику (рис. 21.10):

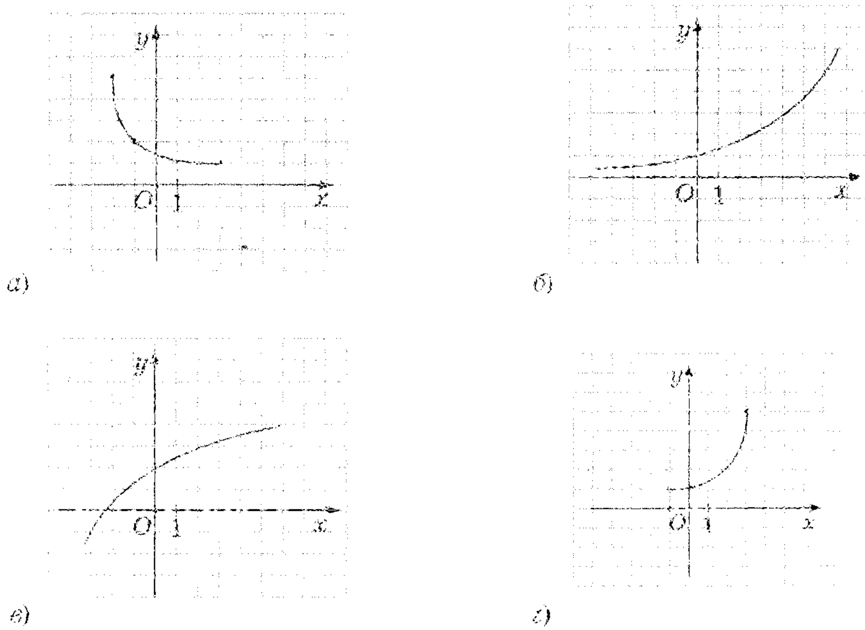


Рис. 21.10

Установите по графикам, изображенным на рисунке 21.11, какие из функций возрастающие, какие — убывающие.

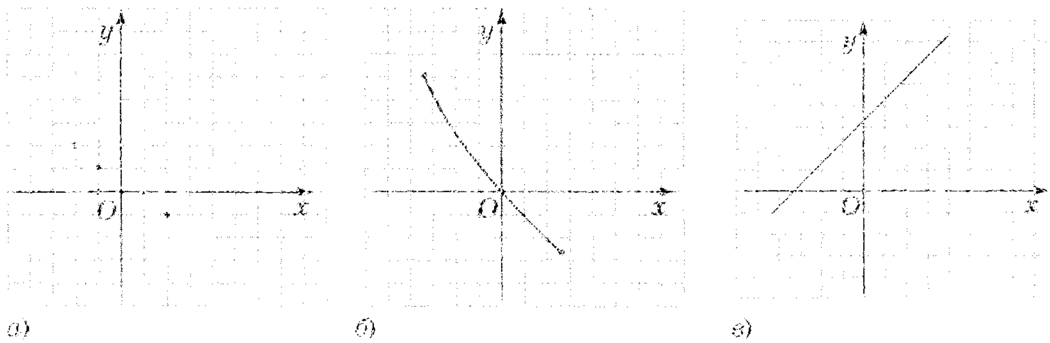


Рис. 21.11

По графику функции, изображенному на рисунке 21.12, найдите:

1) область определения функции;

2) значение аргумента, при котором функция равна нулю;

3) числовые промежутки, на которых функция: а) возрастает; б) убывает.

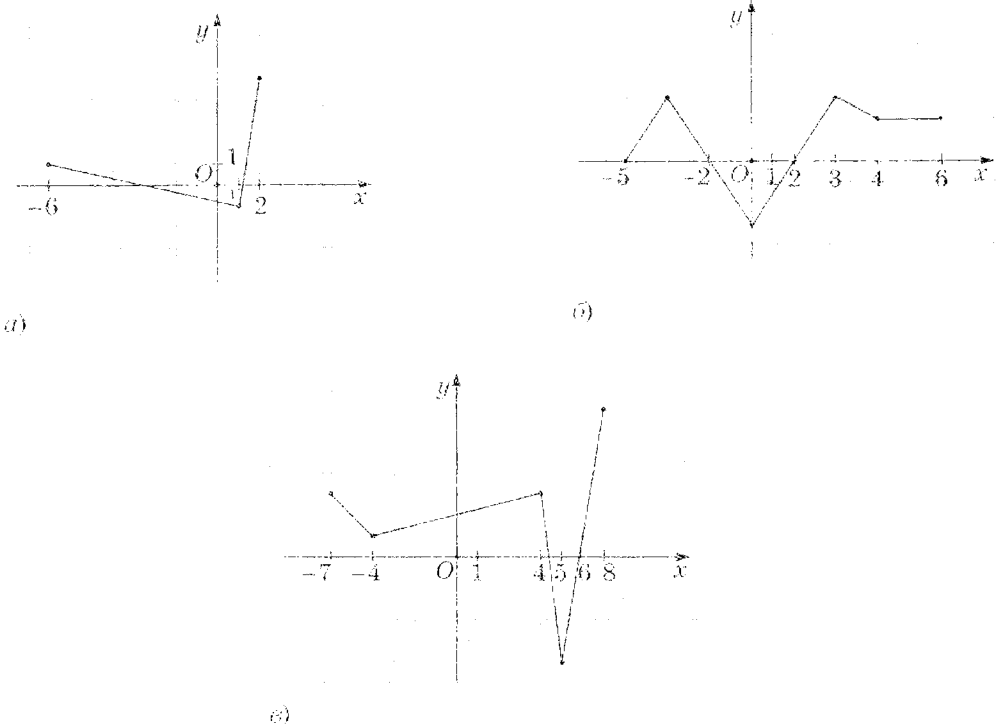


Рис. 21.12

По графику функции, изображенному на рисунке 21.12, найдите:

1) область определения функции;

2) значение аргумента, при котором функция равна нулю;

3) числовые промежутки, на которых функция: а) возрастает; б) убывает;

4) числовые промежутки, на которых функция: а) положительна; б) отрицательна.

Задайте функцию с помощью таблицы и постройте график по ее формуле $y = 5x - 3$, если область определения этой функции состоит из чисел: -1; 0; $0{,}5$; 1; $1{,}5$.

По графику функции, изображенному на рисунке 21.13, найдите:

1) область определения функции;

2) значение аргумента, при котором функция равна нулю;

3) числовые промежутки, на которых функция: а) возрастает; б) убывает.

Как построить график функции $y = kx + b$? Как его расположение зависит от k и b?

Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой $y = kx + b$, где x — независимая переменная, k и b — некоторые числа.

Например, $y = \frac{1}{2}x + 7$; $y = -2x + 3{,}4$; $y = 7$; $y = 12x$; $y = 0$ — линейные функции.

Рассмотрим линейную функцию $y = -3x + 2$ и построим ее график. Поскольку график состоит из точек, координаты которых являются значениями аргумента и значениями функции, то сначала выясним, какие значения может принимать аргумент, т. е. найдем *область определения функции* $y = -3x + 2$. Вместо x можно подставлять любое число, так как при любом значении x можно найти значение произведения $-3x$ и к полученному результату прибавить число 2. Поэтому область определения состоит из всех чисел: $(-\infty; +\infty)$.

Составим таблицу 22.1.

Таблица 22.1

x	-2	-1	0	1	2	3
y	8	5	2	-1	-4	-7

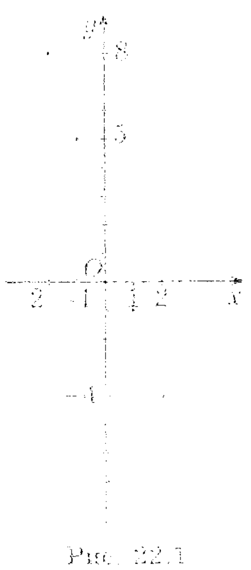


Рис. 22.1

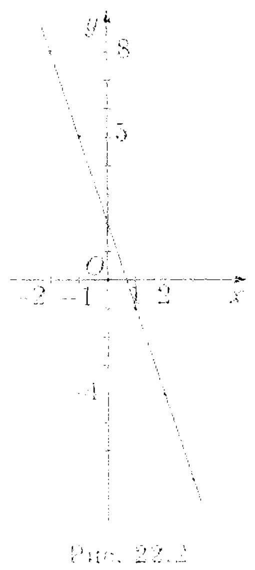


Рис. 22.2

Построим точки, координатами которых будут пары $(-2; 8)$; $(-1; 5)$; $(0; 2)$; $(1; -1)$, $(2; -4)$; $(3; -7)$ (рис. 22.1).

Но это не все точки графика $y = -3x + 2$, так как область определения состоит не только из шести чисел: -2; -1; 0; 1; 2; 3, а из всех чисел.

Можно проверить, что если построить другие точки, из которых состоит график функции $y = -3x + 2$, то они будут принадлежать одной прямой, проходящей через уже построенные точки. Эта прямая и является графиком функции $y = -3x + 2$ (рис. 22.2).

Графиком линейной функции $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа, является прямая.

Сколько точек нужно построить, чтобы изобразить график линейной функции?

Чтобы построить график линейной функции, надо построить только две точки и провести через них прямую.

Например, построим график функции $y = \frac{1}{3}x - 2$. Для этого составим таблицу 22.2.

Таблица 22.2

x	y
0	-2
3	-1

Затем на координатной плоскости отметим точки $A(0; -2)$ и $B(3; -1)$ и через них проведем прямую (рис. 22.3).

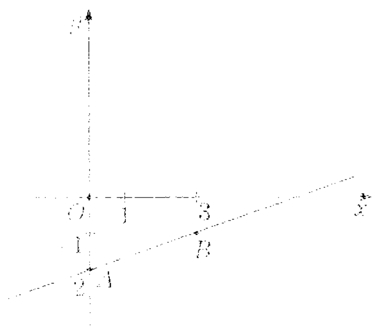


Рис. 22.3

Рассмотрим графики линейной функции $y = kx + b$ в случаях, когда k или b равны 0. Если $k = 0$, то функция примет вид: $y = 0 \cdot x + b$, или $y = b$. Построим, *например*, график функции $y = 2$. Для этого надо построить две точки. Выберем два произвольных значения аргумента: 4 и −1 и подставим в формулу $y = 0 \cdot x + 2$, получим $y = 2$ при $x = 4$ и $y = 2$ при $x = -1$ (табл. 22.3).

Таблица 22.3

x	y
4	2
−1	2

Построим точки $A(4; 2)$; $B(-1; 2)$ и проведем через них прямую (рис. 22.4). Полученная прямая параллельна оси Ox. Эта прямая

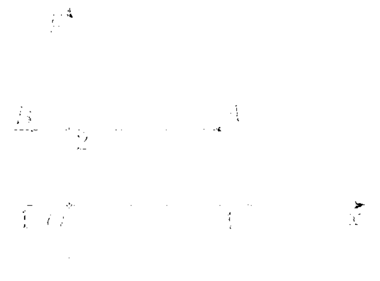


Рис. 22.4

пересекает ось Oy в точке, ордината которой равна 2. Поэтому,

графиком функции $y = b$ является прямая, параллельная оси Ox и проходящая через точку с ординатой, равной числу b.

Если $k = 0$ и $b = 0$, то график функции $y = 0$ совпадает с осью Ox.

Значит, чтобы построить график функции, *например* $y = -2$, надо провести прямую, параллельную оси Ox и пересекающую ось Oy в точке, ордината которой равна -2.

Рассмотрим случай построения графика линейной функции $y = kx + b$, если $b = 0$. В этом случае функция принимает вид $y = kx$. График этой функции при любом значении k проходит через начало координат – точку $O(0; 0)$. Действительно, при $x = 0$, $y = kx$ всегда равно 0.

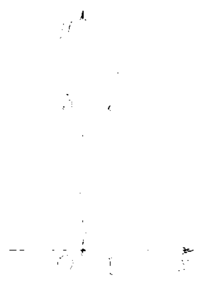


Рис. 22.5

В каких случаях достаточно найти одну точку, чтобы построить график линейной функции?

Для построения графика функции $y = kx$ надо найти координаты только одной точки, кроме $O(0; 0)$.

Например, построим график функции $y = 5x$. Если $x = 1$, то $y = 5$. Значит, прямая, которая является графиком функции $y = 5x$, проходит через две точки: $O(0; 0)$ и $M(1; 5)$ (рис. 22.5).

Является ли линейной функция:

1) $y = x + 1{,}9$; 2) $y = 13 - x$; 3) $y = x^2 - 5$;

4) $y = 5\frac{1}{3}$; 5) $y = 0{,}5x - 3$; 6) $y = -\frac{x}{11} + 3$?

Дана линейная функция:

1) $y = 4x - 3$; 2) $y = 5 - 2x$;

3) $y = 7 - \frac{2}{3}x$; 4) $y = \frac{5}{6}x - 2$.

Найдите y, если $x = 0$; $x = -3$; $x = 9$; $x = 1.5$.

Дана линейная функция:

1) $y = 7{,}2 - 2{,}1x$; 2) $y = \frac{2}{3} - 6x$;

3) $y = -\frac{1}{8}x - 7{,}5$; 4) $y = -4{,}6x + 1\frac{1}{3}$.

Найдите x, если $y = 1$; $y = -1$; $y = \frac{2}{3}$; $y = 5$.

Постройте график функции:

1) $y = x + 4$; 2) $y = x - 2$; 3) $y = 7 - x$;

4) $y = -2 - x$; 5) $y = 0{,}6x - 1$; 6) $y = 3 - 2{,}5x$;

7) $y = \frac{1}{3}x - 6$; 8) $y = 6 - \frac{5}{6}x$.

Постройте график функции, заданной формулой $y = 3x - 6$. Найдите по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному -2; -1; 0; $1{,}5$; 3; 4;

2) значение x, при котором значение y равно: 6; $1{,}5$; 0; $-1{,}5$; -3.

Постройте график функции, заданной формулой $y = -1 - 3x$. Найдите по графику:

1) значение y, соответствующее значению x, равному -3; -1; 0; $1{,}5$; 2;

2) значение x, при котором значение y равно: -4; $-2{,}5$; -1; $3{,}5$; 5.

Как [illegible] графики линейных функций [illegible]

Построим в одной и той же системе координат графики функций:

1) $y = -\frac{2}{3}x + 3$ и $y = 2x - 5$;

2) $y = 1{,}5x - 2$, $y = \frac{1}{2}x + 3$, $y = x - 2$;

3) $y = \frac{1}{3}x$ [illegible] $y = \frac{1}{3}x + 2$; [illegible] $y = \frac{1}{3}x$ [illegible]

1) Построим графики линейных функций

$y = -\frac{2}{3}x + 3$ и $y = 2x - 5$.

Составим таблицы (табл. 23.1).

$y = -\frac{2}{3}x + 3$ [illegible] $y = 2x - 5$

Таблица 23.1

x	y	x	y
0	3	0	−5
3	1	1	−3

Графики [illegible]
$A(3; 1)$ [illegible]

2) [illegible] графики линейных
функций [illegible] $y = \frac{1}{2}x + 2$
и $y = x - 2$.

[illegible] (табл. 23.2):

[illegible] 2 [illegible] $y = \frac{1}{2}x$ [illegible]

[illegible]

[illegible] функций [illegible]

3) Построим графики функций: $y = -\frac{1}{3}x$; $y = -\frac{1}{3}x - 2$; $y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Составим таблицы (табл. 23.3):

$y = -\frac{1}{3}x$; $\qquad y = -\frac{1}{3}x - 2$; $\qquad y = -\frac{1}{3}x + 2$.

Таблица 23.3

x	y		x	y		x	y
			0	-2		0	2
3	-1		3	-3		3	1

У всех этих функций $k = -\frac{1}{3}$. Как видим, графики этих функций расположены параллельно друг другу (рис. 23.3).

Обоснуем это в общем виде. График линейной функции — прямая, поэтому графики линейных функций либо пересекаются в одной точке, либо параллельны, либо совпадают.

Рассмотрим две линейные функции: $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, где x — переменная, k_1, k_2, b_1 и b_2 — некоторые числа. Тогда $k_1x + b_1 = k_2x + b_2$. Это равенство содержит переменную, т.е. оно является уравнением. Решим его. Для этого перенесем слагаемое, содержащее x, в левую часть уравнения, числа — в правую. Получим: $k_1x - k_2x = b_2 - b_1$. Вынесем x за скобки: $(k_1 - k_2)x = b_2 - b_1$.

Если $k_1 \neq k_2$, то $k_1 - k_2 \neq 0$, поэтому $x = \frac{b_2 - b_1}{k_1 - k_2}$ — единственное число. Подставив его в одну из формул $y = k_1x + b_1$ или $y = k_2x + b_2$, найдем

Рис. 23.2

Рис. 23.3

[illegible] решение [illegible]. Поэтому при $k_1 \ne k_2$ графики линейных функций [illegible] b_1 и [illegible] пересекаются в одной точке.

[illegible], то уравнение $(k_1 - k_2)x = b_2 - b_1$ примет вид $0 \cdot x$ [illegible].

[illegible], то получим два уравнения: $y = k_1x + b_1$ и [illegible] коэффициентами; поэтому, построив их графи[illegible] одну прямую.

[illegible] b_1 [illegible] $b_1 \ne b_2$, то уравнение $0 \cdot x = b_2 - b_1$ не имеет решений [illegible], что нет точки, которая одновременно принадлежит [illegible] функций $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$, значит, графики [illegible] $k_1 = k_2$ и $b_1 \ne b_2$ не пересекаются, т. е. расположены [illegible].

[illegible]

[illegible] линейных функций, заданных формулой $y = kx + b$, [illegible] коэффициенты [illegible], и параллельны, [illegible] число b разные, и совпадают, [illegible] и b одинаковы.

[illegible] $y = kx + b$ [illegible] при $x = 0$ значение $y = b$.

[illegible]

[illegible] любой линейной функции $y = kx + b$ проходит через точку [illegible] $(0; b)$.

Как расположены относительно друг друга графики функций:

1) $y = 2x - 10$ и $y = 2x - 9$; 2) $y = -3x + 9$ и $y = -3x + 9$;

3) $y = -5x + 6$ и $y = -5x$; 4) $y = 1,5 + 4x$ и $y = -4x + 3$;

5) $y = 7 + 2,3x$ и $y = 3,2x - 1$; 6) $y = 10x$ и $y = 1 - 10x$?

Для линейной функции: 1) $y = 8x - 1$; 2) $y = 3 - 4x$; 3) $y = -2 + 2x$ запишите формулу такой линейной функции, график которой:

а) параллелен графику данной функции;

б) пересекает график данной функции;

в) совпадает с графиком данной функции.

Для линейной функции: 1) $y = 2x - 7$; 2) $y = 1,4 + 3x$; 3) $y = x + 3,5$; 4) $y = -10,5 + 3x$; 5) $y = 3x - 7$

укажите функцию, график которой:

а) параллелен графику данной функции;

б) пересекает график данной функции;

в) совпадает с графиком данной функции.

Запишите формулы двух линейных функций, графики которых:

а) пересекаются; б) параллельны; в) совпадают.

Найдите координаты точек пересечения графиков функций:

1) $y = -6x + 1$ и $y = 5x + 9$;

2) $y = -17 + 3,4x$ и $y = -1,2x + 69$;

3) $y = 21 - 9x$ и $y = -2,5x + 8$;

4) $y = 16,2 + 8x$ и $y = -0,8x + 7,4$;

5) $y = 1 - 3x$ и $y = -x - 1$;

6) $y = 1 + 7x$ и $y = 6,5x$.

Докажите, что пересекаются графики функций:

1) $y = 9 + x$ и $y = 5x + 6$;

2) $y = -0,5x + 13$ и $y = 8 + x$;

3) $y = 6x - 5,1$ и $y = 9x - 6$.

Постройте графики линейных функций и выясните их взаимное расположение:

1) $y = 1{,}1x + 2$ [illegible] 2) [illegible]

3) $y = 7$ [illegible]

Запишите [illegible] формулу [illegible] которая параллельна графику функции [illegible]

1) [illegible] 2) [illegible]

Постройте в одной и той же координатной [illegible] функций, которые заданы формулой

1) $y = 0{,}5x + b$ при $b =$ [illegible]; 5;

2) $y = kx - 2$ при $k =$ [illegible].

Запишите формулу линейной функции [illegible] проходит через точки:

1) $A(0; -3{,}5)$; [illegible]

3) $C($[illegible]$)$; 4) $D(0; -1{,}5)$

[illegible]

6) $y =$ [illegible] $2{,}5x$.

Найдите число b, если [illegible] функции $y = 3x + b$, $y = 4x + b$, [illegible] в одной и той же [illegible] с графиком функции

1) $y = x - 7{,}2$; [illegible]

3) $y = 3{,}4x + 8$; [illegible]

В каких координатных [illegible]

[illegible]

1) $y = 7x + 5$; [illegible]

3) $y =$ [illegible] $x - 2$; [illegible]

Запишите формулу линейной функции [illegible] проходит через [illegible]

1) $1{,}8$; 2) $-6{,}5$; 3) [illegible] 4) [illegible]

Запишите формулу линейной функции, график которой параллелен графику функции $y = 3x + 5$ и проходит через точку:

1) $A(-4; 1)$;

2) $B(1; 15)$;

3) $C\left(\frac{1}{3}; \frac{1}{16}\right)$;

4) $M(0{,}15; -1)$.

Как решить систему двух линейных уравнений с двумя переменными графическим способом?

При решении систем линейных уравнений графическим способом используем следующий *алгоритм*:

– построить графики уравнений системы в одной координатной плоскости;

– найти координаты точек пересечения графиков уравнений (если они пересекаются);

– записать ответ в виде множества пар, которые являются координатами точек пересечения графиков.

Рассмотрим решение систем двух линейных уравнений с двумя переменными графическим способом, используя примеры.

Пример 1. Решим систему уравнений: $\begin{cases} y - 2x = 0, \\ 2x + y - 4 = 0. \end{cases}$

Сначала выразим y через x из каждого уравнения: $\begin{cases} y = 2x, \\ y = -2x + 4. \end{cases}$

Получим равенства, которые задают линейную функцию $y = kx + b$. Поскольку графиками линейных функций $y = 2x$ и $y = -2x + 4$ являются прямые и первый график проходит через начало координат, то для построения первого графика надо построить одну точку, для второго — две точки. Составим таблицы (табл. 24.1).

$y = 2x$, $\qquad y = -2x + 4$.

Таблица 24.1

1)

x	y
1	2

2)

x	y
0	4
2	0

Построим точки $O(0; 0)$ и $A(1; 2)$ и проведем прямую OA. Получим график функции $y = 2x$, т. е. график уравнения $y - 2x = 0$. Построим точки $B(0; 4)$ и $C(2; 0)$, проведем прямую BC. Получим график функции $y = -2x + 4$ или график уравнения $2x + y - 4 = 0$ (рис. 24.1).

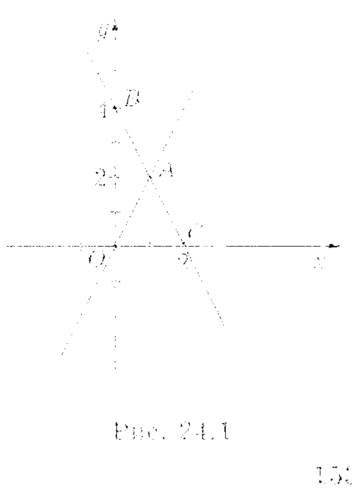


Рис. 24.1

Графики пересекаются в точке с координатой (1; 2). Значит, данная система уравнений имеет единственное решение — (1; 2).

Ответ: {(1; 2)}.

Пример 2. Решим систему уравнений $\begin{cases} 2y - x - 2 = 0, \\ y = 0{,}5x - 1 \end{cases}$ графическим способом. Сначала выразим переменную y через переменную x в каждом уравнении. Получим равенства $y = 0{,}5x + 1$ и $y = 0{,}5x - 1$, которые задают линейную функцию $y = kx + b$.

Построим графики функций:

$y = 0{,}5x - 1$ и $y = 0{,}5x + 1$. Составим таблицы (табл. 24.2).

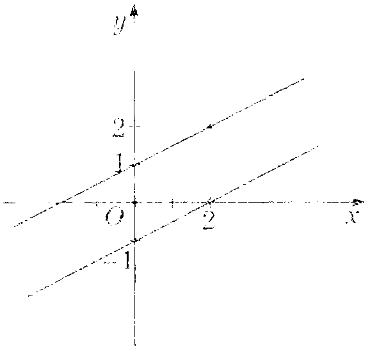


Рис. 24.2

Таблица 24.2

1)

x	y
0	−1
2	0

2)

x	y
0	1
2	2

Графики не пересекаются — они расположены параллельно друг другу, поэтому система не имеет решений (рис. 24.2).

Ответ: ∅.

Пример 3. Сколько решений имеет система уравнений

$$\begin{cases} y + 3x - 2 = 0, \\ 2y = 4 - 6x? \end{cases}$$

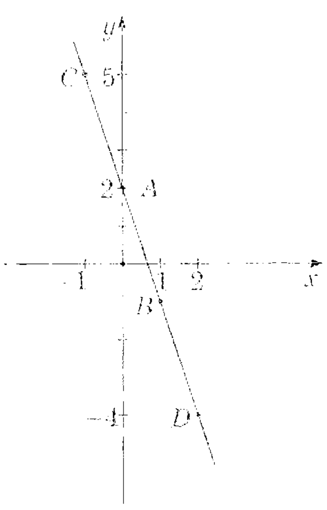


Рис. 24.3

Чтобы ответить на вопрос, построим графики функций $y = 2 - 3x$ и $2y = 4 - 6x$. Составим таблицы (табл. 24.3).

$y = 2 - 3x$ и $2y = 4 - 6x$.

Таблица 24.3

1)

x	y
0	2
1	−1

2)

x	y
−1	5
2	−4

Построим точки $A(0; 2)$ и $B(1; -1)$ и проведем прямую AB. Получим график уравнения $y + 3x - 2 = 0$ (рис. 24.3). Построим точки $C(-1; 5)$ и $D(2; -4)$ и проведем прямую CD. Получим график уравнения $2y = 4 - 6x$.

Постройте графики функций и найдите координаты точки их пересечения:

1) $y = x + 4$ и $y = 6 - x$; 2) $y = 7x + 9$ и $y = 3 + x$;

3) $x + y = 3$ и $x - y = 1$; 4) $3x - 2y = -2$ и $7x - 5y = -4$.

Решите графически систему уравнений

1) $\begin{cases} y = 2x, \\ y = 2 + x; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y = -2x, \\ y = x - 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - 5x = 0, \\ y = x - 4; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y - 3x = 0, \\ y = -6 + x. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x + y = 9, \\ x - y = 1; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x + y = 1, \\ x + y = 5; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y - 6x = -25, \\ y - x = -5; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} y + 7x = -18, \\ y + x = 0. \end{cases}$

1) $\begin{cases} x + 20y = 37, \\ 5y + x = 7; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y - 8x = -33, \\ 7x - y = 29; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 17x + y = 90, \\ y - 23x = -110. \end{cases}$

Выясните, сколько решений имеет система уравнений:

1) $\begin{cases} 6x + y = 0, \\ -4x + y = 2; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y + x = 7, \\ y = -x - 5; \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x - y = 2, \\ 3x - 3y - 6 = 0. \end{cases}$

Найдите значение выражения $7x_0 + 3y_0$, если координаты точки $A(x_0; y_0)$ являются решением системы уравнений:

1) $\begin{cases} 7x - 3y = -1, \\ 14x - 2y = \frac{2}{3}; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 12y + 7x = -4, \\ x + 24y = -2\frac{5}{7}; \end{cases}$

3) $\begin{cases} 8y - 7x = -5{,}6, \\ 35x + 2y = 7; \end{cases}$ 4) $\begin{cases} 10x + 12y = 7{,}5, \\ 24y - 5x = -5. \end{cases}$

Действительно, если $y = 0$, получим $ax^2 = 0$. Поскольку $a \neq 0$, то $x^2 = 0$, или $x \cdot x = 0$. Значение произведения равно нулю, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, $x = 0$.

Для построения графиков функций $y = x^2$ и $y = -x^2$ составим таблицу 25.1.

Таблица 25.1

x	-3	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3
$y = x^2$	9	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	9
$y = -x^2$	-9	-4	-1	$-\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-1	-4	-9

Если построить другие точки, принадлежащие графику функции $y = x^2$ или $y = -x^2$, то увидим, что они расположены на линии, которая плавно соединяет уже построенные с помощью таблицы точки.

Графики функций $y = x^2$ и $y = -x^2$ называют *параболами* (рис. 25.1, 25.2).

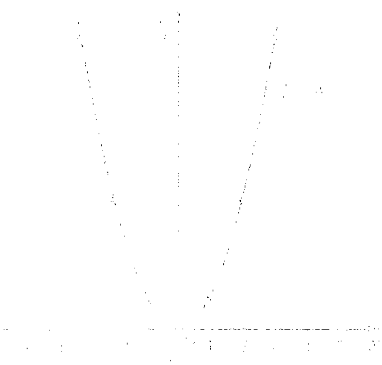


Рис. 25.1

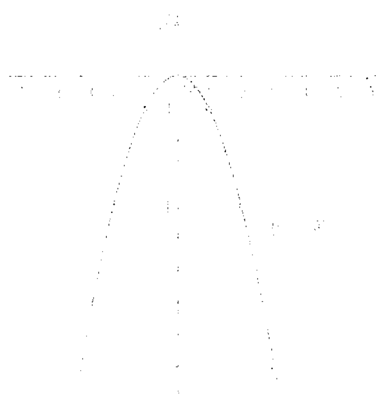


Рис. 25.2

Для построения графиков функций $y = 2x^2$ и $y = -2x^2$ составим таблицу 25.2.

Таблица 25.2

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = 2x^2$	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8
$y = -2x^2$	-8	-2	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	-2	-8

При одних и тех же значениях аргумента [illegible] значения функций [illegible] (табл. 25.2).

Таблица 25.3

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = 2x^2$	32	8	2	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	2	8	32
$y = x^2$	16	4	1	$\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	1	4	16
$y = \frac{1}{2}x^2$	8	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{2}$	2	8

При одних и тех же значениях аргумента значения функции $y = 2x^2$ в 2 раза больше соответствующих значений функции $y = x^2$.

Говорят, что график функции $y = 2x^2$ получается из графика функции $y = x^2$ с помощью его *растяжения вдоль оси Oy* в 2 раза.

При одних и тех же значениях аргумента значения функции $y = \frac{1}{2}x^2$ в 2 раза меньше соответствующих значений функции $y = x^2$.

Говорят, что график функции $y = \frac{1}{2}x^2$ получается из графика функции $y = x^2$ с помощью его *сжатия вдоль оси* Oy в 2 раза.

В одной и той же системе координат построены графики функций: $y = x^2$, $y = \frac{1}{2}x^2$ и $y = 2x^2$ (рис. 25.3).

Все эти графики называют *параболами*.

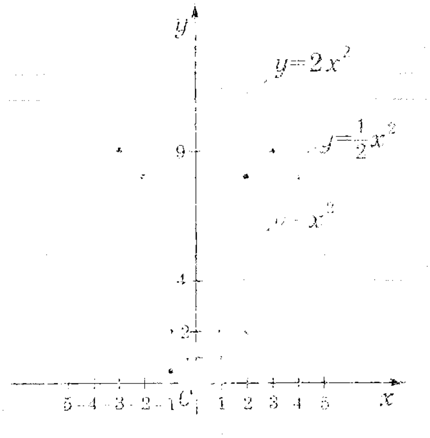


Рис. 25.3

Для краткости вместо предложения "построить параболу, которая является графиком функции $y = x^2$" говорят: "построить параболу $y = x^2$".

В одной и той же системе координат постройте параболы, которые являются графиками функций: $y = -x^2$, $y = -\frac{1}{2}x^2$ и $y = -2x^2$.

Принадлежит ли графику функции $y = 3x^2$ точка:

1) $A(1; 3)$; 2) $B(0,5; 0,75)$; 3) $C(-2; 8)$;

4) $M(-4; 49)$; 5) $P(-1; 3,5)$; 6) $K(\pi; 3\pi^2)$?

Постройте график функции $y = -3x^2$. По графику найдите и запишите промежутки возрастания и убывания функции.

Постройте в одной координатной плоскости графики функций:

1) $y = 4x^2$ и $y = \frac{1}{4}x^2$;

2) $y = x^2$ и $y = \frac{1}{3}x^2$;

3) $y = 2x^2$ и $y = 5x^2$.

С помощью графика функции $y = 0,4x^2$ сравните значения выражений:

1) $0,4 \cdot 3^2$ и $0,4 \cdot 4^2$; 2) $0,4 \cdot (-2)^2$ и $0,4 \cdot (-3)^2$.

Используя графики функций, найдите число корней уравнения:

1) $x^2 + 4 = 0$; 2) $4x^2 - 3 = 5$;

3) $5 - 0,4x^2 = 2$; 4) $2^2 \cdot 3^2 x^2 = 4$.

Пересекаются ли графики функций $y = 3x^2$ и $y = 5 - 2x$?

Найдите графическим способом приближенные значения корней уравнения $2x^2 = 3x + 1$.

Является ли функция $y = \frac{1}{3}x^2$ возрастающей (убывающей) на промежутке:

1) $[1; 4]$; 2) $[-4; -2]$; 3) $[0; 14]$?

а) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = 5x^2$ на промежутке:

1) $[0; 5]$; 2) $[-1; 2]$;

3) $[-5; -4]$; 4) $[0,4; 2,6]$.

б) Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $y = -0,5x^2$ на промежутке:

1) $[-2; 0]$; 2) $[-3; 3]$;

3) $[-5; -4]$; 4) $[0; 6]$.

Могут ли пересекаться графики функций $y = ax^2$ и $y = ax - 5$?

Какими свойствами обладает функция $y = ax^3$ и как построить ее график?

Рассмотрим свойства функции $y = ax^3$, где $a \neq 0$.

1) областью определения функции $y = ax^3$ является множество чисел числовой прямой $(-\infty; +\infty)$. Объясните, почему.

Символически записывают: $D(y) = (-\infty; +\infty)$, или $D(ax^3) = (-\infty; +\infty)$, или $D(y) = R$, или $D(ax^3) = R$.

2) Найдем множество значений функции $y = ax^3$:

- если число a — положительное ($a > 0$) и при этом:

переменная x принимает отрицательные значения, то множеством значений функции $y = ax^3$ является открытый числовой луч $(-\infty; 0)$;

- переменная x принимает положительные значения, то множеством значений функции $y = ax^3$ является открытый числовой луч $(0; +\infty)$;

- переменная x принимает значение, равное нулю, то значением функции $y = ax^3$ будет число нуль.

Следовательно, при $a > 0$ множеством значений функции $y = ax^3$ является множество чисел числовой прямой $(-\infty; +\infty)$.

Множеством значений функции $y = ax^3$, где $a \neq 0$, является множество [illegible] числовой прямой $(-\infty; +\infty)$.

Символически записывают: $E(y) = (-\infty; +\infty)$, или $E(ax^3) = (-\infty; +\infty)$, или $E(y) = R$, или $E(ax^3) = R$.

Из первого и второго свойств функции $y = ax^3$ следует, что ее график расположен:

в I и III координатных четвертях при $a > 0$,

в II и IV координатных четвертях при $a < 0$.

3) Найдем промежутки знакопостоянства функции.

Из первого и второго свойств функции $y = ax^3$ следует, что она принимает:

при $a > 0$ — положительные значения на $(0; +\infty)$, [illegible] значения — на $(-\infty; 0)$, [illegible] положительные значения [illegible] отрицательные значения [illegible]

[illegible] функции. Значение функции [illegible] равно нулю при $x = 0$.

[illegible] $y \neq 0$. [illegible]

[illegible] 26.1.

[illegible]

[illegible]

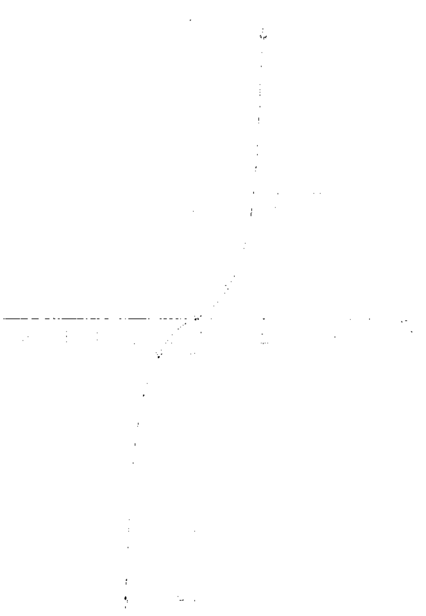


Рис. 26.1

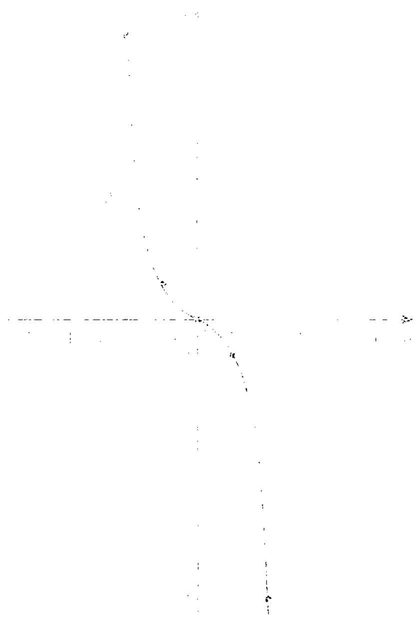


Рис. 26.2

Для построения графиков функций $y = 2x^3$ и $y = -2x^3$ составим таблицу 26.2.

Таблица 26.2

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = 2x^3$	-16	-2	$-\frac{1}{4}$	0	$\frac{1}{4}$	2	16
$y = -2x^3$	16	2	$\frac{1}{4}$	0	$-\frac{1}{4}$	-2	-16

Заполните таблицу 26.3. При одних и тех же значениях аргумента сравните соответствующие значения функций: 1) $y = 2x^3$ и $y = x^3$; 2) $y = \frac{1}{2}x^3$ и $y = x^3$.

Таблица 26.3

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = 2x^3$									
$y = x^3$									
$y = \frac{1}{2}x^3$									

Графики всех этих функций $y = x^3$, $y = \frac{1}{2}x^3$ и $y = 2x^3$ называют *кубическими параболами*.

Для краткости вместо предложения "построить кубическую параболу, которая является графиком функции $y = x^3$", говорят: "построить кубическую параболу $y = x^3$".

В одной и той же системе координат постройте кубические параболы, которые являются графиками функций: $y = -x^3$, $y = -\frac{1}{2}x^3$ и $y = -2x^3$.

Принадлежит ли графику функции $y = x^3$ точка:

1) $A(2;\ 16)$; 2) $B(-1;\ -1)$;
3) $C(3;\ 54)$; 4) $D(-2;\ -8)$;
5) $M(-0{,}2;\ -0{,}008)$; 6) $R(-3;\ 27)$;
7) $P(0{,}3;\ 1{,}27)$; 8) $X(-5;\ -125)$?

Постройте график функции $y = 0{,}5x^3$. По графику найдите:

1) значения y, соответствующие $x = -1{,}25;\ -0{,}75;\ 2{,}5;\ 4$;
2) значения x, которым соответствует $y = -3;\ -1;\ 4;\ 4{,}8$.

Постройте в одной координатной плоскости графики функций:

1) $y = x^3$, $y = 5x^3$, $y = \frac{1}{4}x^3$, $y = 4x^3$;
2) $y = -5x^3$, $y = -\frac{1}{4}x^3$; $y = -4x^3$; $y = -\frac{1}{2}x^3$.

С помощью графика функции $y = x^3$ сравните числа:

1) $(-3)^3$ и $(-2)^3$; 2) $(-1{,}2)^3$ и $0{,}2^3$;
3) $4{,}4^3$ и $5{,}02^3$; 4) 0 и $(-2)^3$.

Имеет ли корни уравнение:

1) $x^3 = 2x + 1$; 2) $2x^3 = -3x$;
3) $0{,}4x + 2 = x^3$; 4) $-1{,}2x - 1 = x^3$?

Решите уравнение:

1) $x^3 = -3$; 2) $x^3 = 125$;
3) $2x^3 = -54$; 4) $-0{,}5x^3 = -4$.

Пересекаются ли графики функций $y = -0{,}4x^3$ и $y = -0{,}3x + 5$?

Найдите графическим способом приближенные значения корней уравнения:

1) $-0{,}3x^3 = -4$; 2) $0{,}3x^3 = 5$; 3) $-0{,}3x^3 = 1{,}4$.

Какими свойствами обладает функция $y = \frac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ и как построить ее график?

Рассмотрим свойства функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$.

1) Областью определения функции $y = \frac{k}{x}$ является множество всех чисел, кроме нуля: $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. Объясните, почему.

Символически записывают: $D(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, или $D(\frac{k}{x}$, $(k \neq 0)) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

2) Найдем множество значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$:

если число k — положительное $(k > 0)$ и при этом:

– переменная x принимает отрицательные значения, то множеством значений функции $y = \frac{k}{x}$ является числовой луч $(-\infty; 0)$;

– переменная x принимает положительные значения, то множеством значений функции $y = \frac{k}{x}$ является числовой луч $(0; +\infty)$;

– переменная x принимает значение, равное нулю, то значение функции $y = \frac{k}{x}$ не существует.

Следовательно, при $k > 0$ множеством значений функции $y = \frac{k}{x}$ является множество чисел $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Множеством значений функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, является множество чисел $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Символически записывают: $E(y) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$, или $E(\frac{k}{x}) = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Из 1) и 2) свойств функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, следует, что ее график расположен:

— в I и III координатной четвертях при $k > 0$,

— во II и IV координатной четвертях при $k < 0$.

3) Найдем промежутки знакопостоянства функции.

Из 1) и 2) свойств функции $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$ следует, что она принимает:

при $k > 0$ — положительные значения на $(0; +\infty)$; отрицательные значения — на $(-\infty; 0)$.

при $k < 0$ — положительные значения на $(-\infty; 0)$; отрицательные значения — на $(0; +\infty)$.

4) Найдем нули функции.

Функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, не имеет нулей. Это означает, что график этой функции не пересекает оси Ox.

5) Найдем промежутки возрастания и убывания функции.

Пусть $x_1 > x_2$. Сравним y_1 и y_2. Для этого найдем значение разности $y_1 - y_2$.

$y_1 - y_2 = \frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_2}$ — по формуле функции $y = \frac{k}{x}$;

$\frac{k}{x_1} - \frac{k}{x_2} = k \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right)$ — вынесли общий множитель k за скобки;

$k \cdot \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) = k \cdot \left(\frac{x_2}{x_1 x_2} - \frac{x_1}{x_1 x_2}\right)$ — привели дроби к общему знаменателю.

Поскольку k может принимать как положительные, так и отрицательные значения, то рассмотрим два случая: а) если $k > 0$, б) если $k < 0$, при этом будем учитывать, что по допущению $x_1 > x_2$, значит, $x_1 - x_2 > 0$, или $x_2 - x_1 < 0$. Тогда в произведении $k \cdot \left(\frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2}\right)$

числитель дроби принимает отрицательные значения, а знаменатель — положительные, отдельно на промежутке $(-\infty; 0)$ и на промежутке $(0; +\infty)$, так как при $x_1 < x_2 < 0$ и $x_2 > x_1 > 0$ значение произведения двух положительных чисел и двух отрицательных чисел есть число положительное. Поэтому, если:

а) $k > 0$, то $y_1 - y_2 = k \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2} > 0$. Это означает, что для всех значений переменной x из ее области определения, т. е. на числовых промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, возрастающая, так как большему значению аргумента x отдельно на каждом из этих промежутков соответствует большее значение функции y.

б) $k < 0$, то $y_1 - y_2 = k \cdot \frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2} < 0$. Это означает, что для всех значений переменной x из ее области определения, т. е. на числовых промежутках $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$ функция $y = \frac{k}{x}$, где $k \neq 0$, убывающая, так как большему значению аргумента x отдельно на каждом из этих промежутков соответствует меньшее значение функции y.

Для построения графика функции $y = \frac{1}{x}$ и $y = -\frac{1}{x}$ составим таблицу 27.1.

Таблица 27.1

x	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$y = \frac{1}{x}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-2	не сущ.	2	1	$\frac{1}{2}$
$y = -\frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$	1	2	не сущ.	-2	-1	$-\frac{1}{2}$

Если построить другие точки, принадлежащие графику функции $y = \frac{1}{x}$ или $y = -\frac{1}{x}$, то увидим, что они расположены на линии, которая плавно соединяет точки, построенные с помощью таблицы 27.1 (рис. 27.1, 27.2).

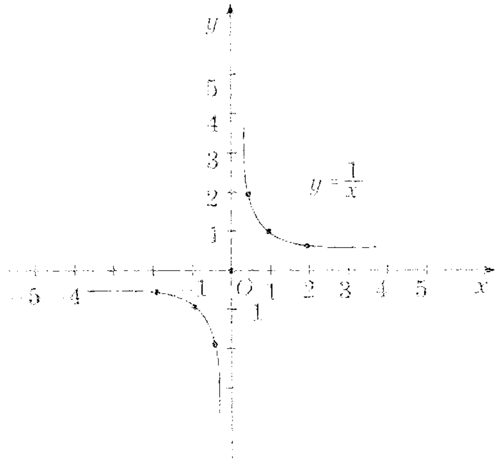


Рис. 27.1

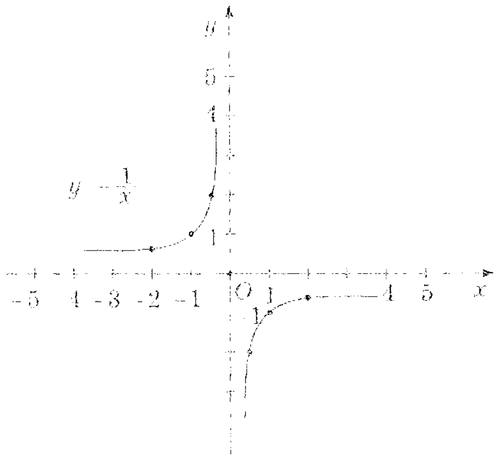


Рис. 27.2

Графики функций называют *гиперболами* (рис. 27.1, 27.2).

Заполните таблицу 27.2. При одних и тех же значениях аргумента сравните соответствующие значения функций: 1) $y = \frac{2}{x}$ и $y = \frac{1}{x}$; 2) $y = \frac{1}{2x}$ и $y = \frac{1}{x}$;

Таблица 27.2

x	-4	-2	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	2	4
$y = \frac{2}{x}$									
$y = \frac{1}{x}$									
$y = \frac{1}{2x}$									

Графики всех этих функций $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{2}{x}$ и $y = \frac{1}{2x}$ называют *гиперболами*.

Для краткости вместо предложения “построить гиперболу, которая является графиком функции $y = \frac{1}{x}$”, говорят: “построить гиперболу $y = \frac{1}{x}$”.

В одной и той же системе координат постройте гиперболы, которые являются графиками функций: $y = -\frac{1}{x}$, $y = -\frac{1}{2x}$ и $y = -\frac{2}{x}$.

Принадлежит ли графику функции $y = \frac{1}{x}$ точка:

1) $A(2;\ 0{,}5)$;

2) $B(-3;\ 4{,}3)$;

3) $C(-10;\ -0{,}1)$;

4) $M(-0{,}2;\ -5)$?

Постройте график функции $y = \frac{3}{x}$. По графику найдите:

1) значение функции, соответствующее значению аргумента $x = -3;\ -0{,}6;\ 5;\ 30$;

2) значение аргумента x, которому соответствует значение функции $y = -2;\ -1{,}5;\ 0{,}5;\ 2{,}5;\ 4$;

3) $f(0{,}5) + f(3);\ f(1) - f(-1{,}5);\ f(2) - 2f(3);\ f(-0{,}3) + 3f(1{,}5)$, если $y = f(x)$.

Постройте в одной координатной плоскости графики функций:

$y = \frac{2}{x}$; $y = \frac{4}{x}$; $y = -\frac{2}{x}$; $y = -\frac{4}{x}$; $y = \frac{0{,}5}{x}$.

Функция задана формулой: $y = -\frac{5}{x}$. Заполните таблицу 27.3.

Таблица 27.3

x	-5	2	-1	1	2	5
y						

Имеет ли корни уравнение:

1) $-\frac{5}{x} =$ [illegible]$x+2$; 2) $-\frac{2,5}{x} = 5$; 3) $\frac{4}{x} = -x$; 4) $\frac{6}{x} = 4x - 3$?

Решите уравнение графическим способом:

1) $4 = -\frac{2}{x}$; 2) $3 = \frac{4}{x}$; 3) $x = -\frac{2}{x}$; 4) $2x = -\frac{5}{x}$;

5) $x^2 = \frac{1}{x}$; 6) $x^3 = -x^2$; 7) $x^2 = x + 2$; 8) $0,25x^2 = \frac{2}{x}$.

Пересекается ли график функции $f(x) = -\frac{5}{x}$ с графиком функции:

1) $y = -x + 3$; 2) $y = 2x$; 3) $y = x + 1$; 4) $y = -3x - 3,5$;

5) $y = -x^2$; 6) $y = -0,5\,x$[illegible]; 7) $y = \frac{1}{3}x^2$; 8) $y = |x|$?

Могут ли графики функций $y = \frac{4}{x}$ и $y = ax + b$ пересекаться:

1) только в одной точке;

2) только в двух точках;

3) в трех точках?

Постройте график функции:

1) $y = \frac{2}{x}$; 2) $y = -\frac{2}{x}$;

3) $y = -\frac{1}{|-x|}$; 4) $y = \frac{-0,2}{|x|}$.

Найдите наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = \frac{2}{|x|}$ на промежутке:

1) $[2,4; 5]$; 2) $[-2,4; -1]$; 3) $[-3,5; -0,5]$; 4) $[4; 1$[illegible]$]$.

График функции $y = \frac{k}{x}$ проходит через точку $M(-4; 2)$. Проходит ли график этой функции через точку:

1) $A(-1; 8)$; 2) $B(3; -9)$; 3) $C(0,5; -16)$; 4) $K(-3; 2\frac{2}{3})$?

Какая точка не принадлежит графику функции $y = 2x^2$:

A. (0; 0); B. (1; 2); C. (−1; 2); D. (−1; −2)?

Вычислите значение функции $y = -3x^3$ при $x = -2$:

A. −24; B. 18; C. 24; D. −18.

При $x = -3$ значение функции $y = ax^2$ равно −9. Найдите значение a:

A. 1; B. −1; C. $\frac{1}{3}$; D. $-\frac{1}{3}$.

Какая точка принадлежит графику функции $y = -\frac{5}{x}$:

A. (1; 5); B. (−2; 10); C. $\left(\frac{1}{5}; -25\right)$; D. (2; 2,5)?

Укажите множество значений x, при которых функция $y = -\frac{14}{x}$ возрастает:

A. $(0; +\infty)$; B. $(-\infty; 0)$; C. R; D. $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$.

Выразите формулой обратную пропорциональность, зная, что ее график проходит через точку $A(-2; -4,5)$:

A. $y = -\frac{9}{x}$; B. $y = \frac{9}{x}$; C. $y = -\frac{14}{x}$; D. $y = -\frac{2}{9x}$.

Укажите множество значений x, при которых функция $y = \frac{20}{x}$ положительна:

A. $(0; +\infty)$; B. $(-\infty; 0)$; C. R; D. $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$.

Сколько точек пересечения имеют графики функций $y = x^2$ и $y = x^3$:

A. Две точки; B. Одну точку;

C. Не имеют общих точек; D. Три точки?

Какие из точек принадлежат графику функции $y = -x^2$:

A. (1; 1), (−1; −1); B. (1; −1), (−1; −1);

C. (−1; 1), (1; −1); D. (1; 1), (0; 0)?

Сколько точек пересечений имеют графики функций $y = 3x^2$ и $y = \frac{3}{x}$:

A. Не имеют общих точек; B. Одну точку;

C. Две точки; D. Три точки?

Математическая статистика — раздел математики, посвященный математическим методам систематизации, обработки и исследования результатов наблюдений для научных и практических выводов.

Что такое генеральная совокупность, случайная выборка, вариационный ряд, варианта?

Выводы, обобщения, как в науке, так и на практике, ценны лишь тогда, когда они обоснованы фактами.

Всякое исследование начинается со сбора фактов, наблюдения. Обработать и систематизировать эти факты нам помогут статистические понятия: *генеральная совокупность*, *случайная выборка*, *вариационный ряд*, *варианта*.

Генеральной совокупностью (в англ. — *population*) называется множество всех объектов или явлений, имеющих общую характеристику, которые подлежат [illegible].

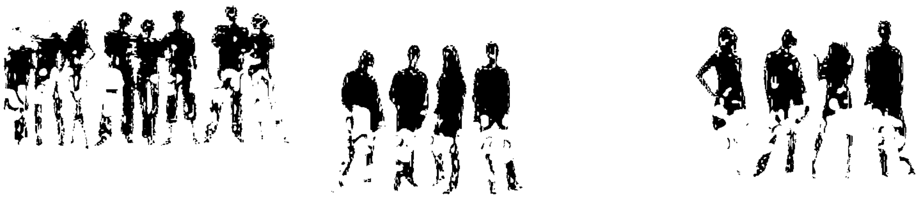
Генеральная совокупность зависит от тех целей, которые ставятся перед исследованием. *Например*, если нас интересует исследование размеров листьев дуба, то генеральной совокупностью будет воображаемое множество всех листьев дуба; в исследовании температуры воздуха в осенние месяцы — все показатели температуры воздуха, которые наблюдались в осенние месяцы; в исследовании роста семиклассников — показатели роста всех детей этого возраста.

Из каких объектов может состоять генеральная совокупность?

Элементами генеральной совокупности могут быть объекты любой природы: неодушевленные предметы, живые люди, природные явления и т. п.

Если из генеральной совокупности отобрать произвольным образом некоторые его элементы (объекты), то полученная [illegible]

Например, в исследовании роста детей 13 лет случайной выборкой будут дети 13 лет, которые учатся в вашей школе (рис. 28.1).



Генеральная совокупность: все дети 13 лет

Случайная выборка: дети 13 лет, отобранные из генеральной совокупности

Рис. 28.1

Вариационным рядом называется упорядоченная по невозрастанию или неубыванию последовательность объектов совокупности.

1. В последовательности –3°, 0°, –3°, –6°, –7°, –12°, –11°, 0°, 0°, –7°, –9°, –10°, –12°, –10° записана температура воздуха, которая была с 5 по 18 ноября. Почему эта последовательность не является вариационным рядом?

2. Являются ли вариационными рядами приведённые ниже последовательности: –12°, –12°, –11°, –10°, –10°, –9°, –7°, –7°, –6°, –3°, –3°, 0°, 0°, 0°; 0°, 0°, 0°, –3°, –3°, –6°, –7°, –7°, –9°, –10°, –10°, –11°, –12°, –12°?

Каждый член вариационного ряда называется *вариантой*.

Каковы преимущества вариационного ряда перед последовательностью, произвольно фиксирующей результаты наблюдений (исходов)?

С помощью вариационного ряда можно сразу указать наименьшее и наибольшее значения ряда; значения, которые повторяются чаще других и т. д. Но при большом количестве вариантов выборки и вариационный ряд — не самая удобная форма представления полученной информации.

Из перечисленных последовательностей укажите вариационные ряды:

1) 1, 12, 13, 15, 16, 21, 22, 24, 26;

2) −17, −15, −13, −11, −10, −9, −8, −5, −4;

3) 111, 112, 113, 125, 126, 121, 122, 124, 126;

4) 101, 102, 103, 105, 216, 221, 222, 224, 326, 334, 339.

Запишите рост каждого учащегося класса согласно списку. Будут ли записанные значения роста учащихся вариационным рядом? Обоснуйте ответ.

Температура воздуха днем в г. Астане в период с 9 ноября до 19 ноября 2016 г. представлена в виде ряда:

−2°, 6°, −2°, 3°, −13°, −14°, −10°, −5°, −3°, −7°.

Является ли данный ряд вариационным? Обоснуйте ответ.

Является ли данная последовательность 1, 1, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 6, 6, 6, 6, 6, 7, 7, 8, 9, 9, 11, 11, 12, 12 вариационным рядом? Запишите варианту, которая повторяется наибольшее число раз. Запишите варианту, которая повторяется наименьшее число раз. Запишите наибольшее и наименьшее значения варианты.

Назовите генеральную совокупность для выборки.

Составьте вариационный ряд масс животных, приведенный в таблице 28.1.

Таблица 28.1

Медведь	Волк	Лисица	Заяц	Косуля	Лось	Кабан
60 кг	50 кг	5 кг	3, 5 кг	25 кг	45 кг	36 кг

Приведите пример выборки из генеральной совокупности количества учащихся 7 и 8 классов вашей школы, занимающихся спортом.

Таблица 28.2

	Волейбол	Баскетбол	Плавание	Легкая атлетика	Теннис	Футбол	Гимнастика	Борьба
7 класс								
8 класс								

1. Составьте вариационный ряд из данной генеральной совокупности.
2. Запишите наибольшее и наименьшее значения варианты.

Как вычислить абсолютную и относительную частоты варианты и представить выборку в виде таблицы частот?

В вариационном ряду некоторые варианты повторяются по несколько раз: −12°, −12°, −11°, −10°, −10°, −9°, −7°, −7°, −6°, −3°, −3°, 0°, 0°, 0°. В таких случаях результаты наблюдений (исходов) удобно представлять в виде таблицы 29.1, в которой указываются только разные варианты и их число.

Таблица 29.1

Варианты (исходы)	−12	−11	−10	−9	−7	−6	−3	0
Абсолютная частота варианты	2	1	2	1	2	1	2	3

Абсолютной частотой варианты называется число, которое показывает, сколько раз наблюдалась соответствующая варианта.

Почему абсолютная частота варианты −7° равна двум, а варианты 0° — трем?

В нашем примере всего было 14 наблюдений (исходов). Если абсолютную частоту варианты разделить на общее число наблюдений (исходов), то получим относительную частоту варианты.

Таблица 29.2

Варианты (исходы)	−12°	−11	−10	−9°	−7	−6	−3	0°
Абсолютная частота варианты	2	1	2	1	2	1	2	3
Относительная частота варианты	$\frac{1}{7} \approx 0{,}14$	$\frac{1}{14} \approx 0{,}07$	$\frac{1}{7} \approx 0{,}14$	$\frac{1}{14} \approx 0{,}07$	$\frac{1}{7} \approx 0{,}14$	$\frac{1}{14} \approx 0{,}07$	$\frac{1}{7} \approx 0{,}14$	$\frac{3}{14} \approx 0{,}21$

Относительную частоту варианты иногда записывают в процентах.

Мы представили статистические данные в виде таблицы частот.

[illegible] проверьте [illegible] таблицы [illegible] значение [illegible] абсолютных частот вариантов [illegible] частот [illegible]

Свойства таблицы частот:

1) значение суммы абсолютных частот вариант равно общему числу наблюдений (исходов);

2) значение суммы относительных частот равно 1.

В таблице 29.3 даны значения средней температуры воздуха в Северо-Казахстанской области в течение [illegible] 2013 г.

Таблица 29.3

Температура воздуха	x	29	27	26	25	[illegible]	22	21	20
Абсолютная частота варианта	n	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	1	2	1
Относительная частота варианта	W								

Заполните таблицу, найдя относительную частоту W с точностью до 0,01. Какая варианта появляется чаще всего?

Придумайте какие-нибудь вопросы, на которые, по вашему взгляду, можно найти ответы с помощью этой таблицы.

Дан статистический ряд: 2 2 3 3 3 3 4 2 3 3 2 3 [illegible] 2 3 2 4 3 2 2 3 2 [illegible] 5 2 3 3 2 1 3 2 3 4 3 3 2 3 5 3. Получите по нему вариационный ряд. Найдите по вариационному ряду абсолютную и относительную частоту появления варианты "3", "4".

Соберите сведения о последних четвертных оценках своих одноклассников по алгебре, геометрии, казахскому языку и физике. Ранжируйте каждое из этих сведений в вариационные ряды. Найдите минимальную, максимальную и наиболее популярную оценку по каждому из этих предметов.

2. Найдите абсолютную и относительную частоты для каждого исхода.

3. Подсчитайте, чему равно значение суммы абсолютных частот и чему равно значение суммы относительных частот.

Сделайте вывод.

Как представить результаты выборки в виде полигона частот?

Представим результаты наблюдений графически.

Объясните по рисунку 30.1 как, используя таблицу абсолютных частот варианты 29.2, построили ломаную линию.

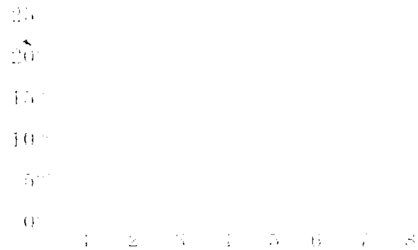


Рис. 30.1

Эту ломаную линию называют *полигоном абсолютных частот*.

Полигоном абсолютных частот называется ломаная линия, звенья которой соединяют точки, абсциссы которых различные варианты, а ординаты – абсолютные частоты этих вариант

Алгоритм построения полигона абсолютных частот:

1. Отложить варианты x на оси Ox.
2. Отложить частоты n на оси Oy.
3. Построить точки с координатами $(x; n)$.
4. Соединить построенные точки отрезками.

Как построили полигон относительных частот на рисунке 30.2, используя данные таблицы 29.2?

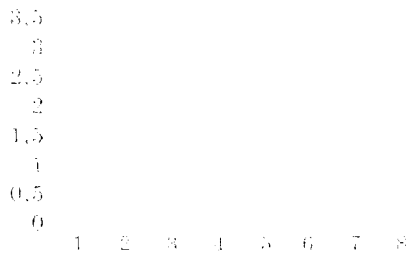


Рис. 30.2

Полигоном относительных частот называется ломаная линия звенья которой соединяют точки, абсциссы которых различные варианты, ординаты — относительные частоты этих вариант.

Алгоритм построения полигона относительных частот:

1. Отложить варианты x на оси Ox.
2. Отложить частоты W на оси Oy.
3. Построить точки с координатами (x, W).
4. Соединить построенные точки отрезками.

В таблице 30.1 частот содержится информация об оценках, полученных учащимися класса за контрольную работу.

Таблица 30.1

Варианты (исходы)	x	3	4	5
Абсолютная частота варианты	n	4	12	9
Относительная частота варианты	W	16%	48%	36%

Частота варианты показывает: отметку "3" за контрольную работу получили 4 учащихся, что составило 16% учащихся класса, отметку "4" — 12 учащихся (18%), а "5" — 9 учащихся (36%).

Эту же информацию можно получить из полигона частот (рисунок 30.3).

Рис. 30.3

Найдите среднее арифметическое ряда чисел, его моду и размах: 13; 15; 13; 12; 12; 12; 13; 14; 13; 15; 13; 12; 12.

1) Составьте для этих статистических данных вариационный ряд.

2) Найдите абсолютную и относительную частоту для значений варианты, входящих в этот ряд.

3) Представьте результаты выборки в виде полигона частот.

Придумайте задания из школьной жизни, составьте вариационный ряд, найдите абсолютную и относительную частоту, найдите значения их сумм. Представьте информацию в виде полигона частот.

Известна случайная выборка из 30 учащихся 8 класса с данными об их росте (в см): 166, 165, 163, 166, 168, 165, 168, 170, 165, 165, 165, 165, 164, 168, 165, 164, 161, 162, 164, 166, 165, 166, 167, 164, 163, 168, 167, 167, 165, 162. Составьте вариационный ряд данной выборки. Постройте по ней таблицу абсолютных и относительных частот и ответьте с ее помощью на вопросы:

1. Какой наименьший и наибольший рост учащихся?

2. Какой процент учащихся имеет рост 168 см?

3. Какой рост учащихся чаще всего встречался в выборке?

По полигону абсолютных частот набора игрушек разных цветов (рис. 30.4) найдите:

1) общее количество игрушек;

2) относительную частоту игрушек каждого цвета;

Рис. 30.4

3) игрушек какого цвета больше (меньше) игрушек других цветов.

Используя данные упражнения 30.1, составьте таблицу частот набора игрушек разных цветов.

Проведите 50 опытов с тремя игровыми кубиками. Экспортируйте результаты в *MS Excel* и найдите сумму очков в каждом опыте. Получите вариационный ряд и составьте для него таблицу частот. Оцените по полученной таблице, с какой частотой значение суммы будет равно 5; 10; 15.

Для контрольной работы учащимся предложили тест из 8 заданий. Количество верных ответов, полученных каждым учащимся из 45, представлено в таблице 30.2.

Таблица 30.2

Число верных ответов	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Абсолютная частота	0	0	0	1	5	14	16	6	6
Относительная частота									

1) Найдите пропущенное значение абсолютной частоты.
2) Найдите относительные частоты числа верных ответов и заполните таблицу.
3) Постройте полигоны абсолютных и относительных частот.

На полигоне частот (рис. 30.5) представлены данные о сотрудниках страховой компании по возрастным группам.

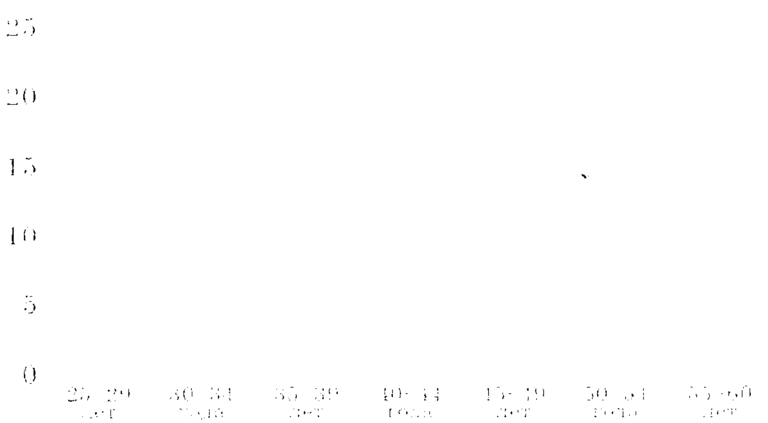


Рис. 30.5

1) Найдите относительную частоту (в %) возрастной категории сотрудников старше 39 лет.

2) Найдите относительную частоту (в %) возрастной категории сотрудников моложе 40 лет.

Если абсолютная частота верных ответов на тест из десяти заданий равна 24, а относительная частота верных ответов равна 30%, то сколько учащихся выполняли этот тест?

Разность между наибольшим и наименьшим значением варианты ряда $+5^{\circ}, 0^{\circ}, 0^{\circ}, +4^{\circ}, +2^{\circ}, +5^{\circ}, +8^{\circ}, +7^{\circ}, +4^{\circ}, +1^{\circ}, +2^{\circ}, 0^{\circ}$ равна:

A. 8°; B. 9°; C. 10°; D. 7°.

Абсолютная частота варианты (-3°) ряда $-2^{\circ}, -2, -1^{\circ}, 0^{\circ}, -3^{\circ}, -2^{\circ}, -2^{\circ}, -5, -6^{\circ}, -3^{\circ}, -3^{\circ}, -2^{\circ}, -3^{\circ}, -5^{\circ}, -4^{\circ}, -6^{\circ}$ равна:

A. 2; B. 3; C. 4; D. 5.

Относительная частота варианты (-2°) ряда $-2^{\circ}, -2^{\circ}, -1^{\circ}, 0^{\circ}, -3^{\circ}, -2, -2^{\circ}, -5, -6^{\circ}, -3^{\circ}, -3^{\circ}, -2^{\circ}, -3, -5^{\circ}, -4^{\circ}, -6^{\circ}$ равна:

A. 20%; B. 25%; C. 28%; D. 30%.

Абсолютная и относительная частота роста учащихся, чаще всего встречающаяся в выборке 163, 162, 163, 165, 162, 165, 166, 158, 160, 162, 165, 165, 164, 162, 160, 164, 161, 162, 164, 162, 165, 162, 160, 162, 163, равна:

A. 7; 28%; B. 6; 32%; C. 8; 30%; D. 8; 32%.

Относительная частота возрастной категории сотрудников старше 44 лет, представленных на полигоне частот (рисунок 30.6), равна:

A. 24%; B. 30%; C. 37%; D. 40%.

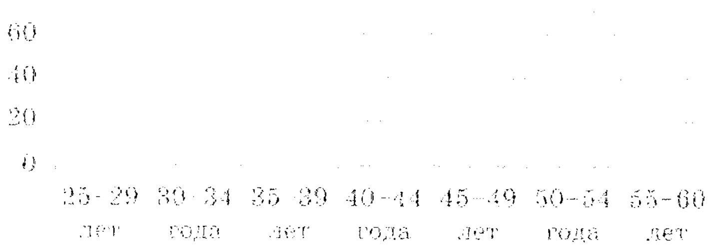


Рис. 30.6

Если в таблице 30.3 представлены относительные частоты верных ответов на тест из десяти заданий, то пропущенное значение относительной частоты равно:

A. 19%; B. 20%; C. 24%; D. 25%.

Таблица 30.3

Число верных ответов	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Относительная частота (%)	1	2	6	8	12	...	22	15	12	4	1

Что такое *формулы сокращенного умножения* и как их применять?

Рассмотрим умножение двучлена $a - b$ на двучлен $a + b$. Для этого используем известное правило умножения многочлена на многочлен, т. е. каждый член первого многочлена умножим на каждый член второго многочлена. Тогда получим: $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 + ab - ab - b^2$. Приводя подобные члены в правой части равенства, получим:

$(a - b)(a + b) = a^2 - b^2$, или $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Равенство $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ называется *формулой разности квадратов*.

Чтение равенства $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ — разность квадратов двух выражений равна произведению их разности на их сумму.

Формулу разности квадратов можно получить геометрическим способом, используя рисунок 31.1.

На этом рисунке изображены:

— квадрат со стороной длиной, равной b, площадь которого равна: $S_1 = b^2$;

— прямоугольник со сторонами длиной a и $(a - b)$, площадь которого равна: $S_2 = a(a - b)$;

— два равных прямоугольника со сторонами b и $(a - b)$, площадь каждого из которых равна: $S_3 = b \cdot (a - b)$.

Из рисунка видно, что квадрат со стороной длиной a, площадь которого $S = a^2$, состоит из квадрата

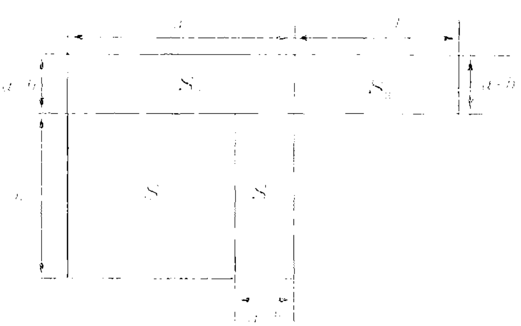


Рис. 31.1

со стороной длиной b и из двух прямоугольников, один со сторонами длиной $(a - b)$ и b, а другой — со сторонами длиной $(a - b)$ и a. Используя указанные выше обозначения, можно записать:

$S = S_1 + S_2 + S_3$, или $S - S_1 = S_2 + S_3$.

Так как площади двух меньших прямоугольников известны, то:

$$S_2 + S_3 = (a - b)\,b + (a - b)\,a = (a - b)(a + b).$$

Следовательно, $S - S_1 = (a - b)(a + b)$.

Подставляя значения $S = a^2$ и $S_1 = b^2$ в последнее равенство, получим формулу разности квадратов $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$.

Рассмотрим примеры на применение формулы разности квадратов:

1) $25 - m^2 = 5^2 - m^2 = (5 - m)(5 + m)$;

2) $y^4 - 0{,}49x^2 = (y^2)^2 - (0{,}7x)^2 = (y^2 - 0{,}7x)(y^2 + 0{,}7x)$.

Использование формулы разности квадратов значительно облегчает различные вычисления, дает возможность привести выражение к более упрощенному виду.

Формулу разности квадратов можно использовать при решении уравнений.

Например, $1{,}69 - z^2 = 0$.

Уравнение такого вида вы встречаете в первый раз. Однако, используя формулу разности квадратов, можно привести это уравнение к известному вам виду уравнений:

$1{,}69 - z^2 = 1{,}3^2 - z^2 = (1{,}3 - z)(1{,}3 + z)$. Тогда вместо уравнения $1{,}69 - z^2 = 0$ получим равносильное ему уравнение:

$(1{,}3 - z)(1{,}3 + z) = 0$. Значение произведения равно нулю, если $z = 1{,}3$, или $z = -1{,}3$. Значит, уравнение имеет корни $1{,}3$ и $-1{,}3$.

Ответ записывают в виде $\{-1{,}3;\ 1{,}3\}$ и говорят, что решением уравнения является множество, состоящее из чисел $-1{,}3$ и $1{,}3$.

Ответ: $\{1{,}3;\ -1{,}3\}$.

Выполните умножение:

1) $(x + y)(x - y)$;
2) $(n - m)(n + m)$;
3) $(k - 2)(k + 2)$;
4) $(3 - c)(3 + c)$;
5) $(4 + b)(4 - b)$;
6) $(a - 7)(a + 7)$;
7) $\left(\frac{1}{7} + x\right)\left(\frac{1}{7} - x\right)$;
8) $\left(a - \frac{2}{9}\right)\left(a + \frac{2}{9}\right)$;
9) $\left(\frac{5}{6} + m\right)\left(\frac{5}{6} - m\right)$;
10) $(0,4 + n)(0,4 - m)$;
11) $(k + 1,1)(k - 1,1)$;
12) $(d - 2,2)(d + 2,2)$.

Выполните действие:

1) $(x - 5)(5 + x)$;
2) $(8 + y)(y - 8)$;
3) $(10 - k)(k + 10)$;
4) $\left(a + \frac{2}{3}b\right)\left(a - \frac{2}{3}b\right)$;
5) $\left(\frac{4}{9}x - y\right)\left(y + \frac{4}{9}x\right)$;
6) $\left(\frac{4}{15}n - m\right)\left(m + \frac{4}{15}n\right)$;
7) $(9x - 5y)(9x + 5y)$;
8) $(-4a + 3b)(3b + 4a)$;
9) $(13k - 2d)(2d + 13k)$;
10) $\left(\frac{5}{4}c + \frac{3}{7}d\right)\left(\frac{3}{7}d - \frac{5}{4}c\right)$;
11) $\left(\frac{1}{3}x - 3y\right)\left(3y + \frac{1}{3}x\right)$;
12) $\left(\frac{1}{5}a - \frac{1}{9}b\right)\left(\frac{1}{9}b + \frac{1}{5}a\right)$.

Разложите на множители:

1) $a^2 - 49$;
2) $64 - b^2$;
3) $c^2 - 2,25$;
4) $2,89 - d^2$;
5) $\frac{64}{81} - x^2$;
6) $\frac{100}{121} - y^2$;
7) $z^2 - \frac{169}{196}$;
8) $t^2 - \frac{400}{441}$;
9) $25x^2 - 36$;
10) $-16 + 49y^2$;
11) $0,64 - \frac{1}{9}z^2$;
12) $\frac{4}{25}t^2 - 36$;

13) $\frac{9}{16} - \frac{1}{144}a^2$; 14) $\frac{25}{64}b^2 - \frac{1}{81}$;

15) $2{,}56x^2 - \frac{225}{361}$; 16) $\frac{81}{100} - 0{,}04c^2$.

Представьте в виде произведения двучлен:

1) $c^2 - 0{,}49$; 2) $16 - k^2$;

3) $400 - m^2$; 4) $t^2 - 225$;

5) $1{,}69 - b^2$; 6) $y^2 - \frac{16}{81}$;

7) $25x^2 - 4$; 8) $\frac{25}{36} - 64y^2$.

Вычислите с помощью формулы $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

1) $13^2 - 9^2$; 2) $20^2 - 19^2$;

3) $2{,}2^2 - 2{,}8^2$; 4) $3{,}5^2 - 3{,}7^2$;

5) $\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$; 6) $\left(\frac{7}{9}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2$;

7) $\left(\frac{5}{12}\right)^2 - \left(\frac{3}{4}\right)^2$; 8) $\left(\frac{3}{10}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$;

9) $\left(\frac{8}{15}\right)^2 - \left(\frac{4}{5}\right)^2$; 10) $\left(2\frac{1}{7}\right)^2 - \left(2\frac{1}{7}\right)^2$;

11) $\left(3\frac{1}{3}\right)^2 - \left(4\frac{1}{2}\right)^2$; 12) $\left(5\frac{1}{6}\right)^2 - \left(7\frac{1}{3}\right)^2$;

13) $51^2 - 41^2$; 14) $54^2 - 46^2$;

15) $76^2 - 24^2$; 16) $228^2 - 172^2$;

17) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2 - \left(2\frac{1}{3}\right)^2$; 18) $\left(7\frac{5}{9}\right)^2 - \left(4\frac{4}{9}\right)^2$.

Вычислите, представив в виде суммы или разности множители, используя формулу $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$:

1) $101 \cdot 99$; 2) $102 \cdot 98$; 3) $103 \cdot 97$;

4) $104 \cdot 96$; 5) $105 \cdot 95$; 6) $106 \cdot 94$.

Упростите выражение:

1) $(5+b)(b-5)-b^2$; 2) $c^2+(9-c)(9+c)$;

3) $\left(\frac{1}{3}-z\right)\left(\frac{1}{3}+z\right)-\frac{1}{9}$; 4) $-\frac{16}{49}+\left(\frac{4}{7}-d\right)\left(d+\frac{4}{7}\right)$;

5) $(0,9-a)(a+0,9)-a(1+a)$; 6) $k(5-k)+(1,2+k)(k-1,2)$.

Найдите значение выражения:

1) $(7+d)(d-7)+(d+3)(3-d)+40(d+1)$ при $d=0,5$;

2) $x(2x-1)-(6+x)(x-6)+(x+10)(10-x)$ при $x=-101$;

3) $1,2(b+1,2)+(0,5-b)(b+0,5)-(b+1,3)(1,3-b)$ при $b=-\frac{5}{6}$;

4) $(1,5+c)(c-1,5)-(c+8)(c-8)-2,5(c-24,5)$ при $c=\frac{2}{3}$.

Решите уравнение:

1) $x^2-16=0$; 2) $25-y^2=0$; 3) $3,24-z^2=0$;

4) $\frac{144}{169}-n^2=0$; 5) $7,29-m^2=0$; 6) $k^2-\frac{196}{625}=0$.

Докажите, что значение выражения не зависит от переменной a:

1) $(a-10)(10+a)+60-a^2$;

2) $0,64+a^2-(0,5+a)(a-0,5)$;

3) $(2,4-a)(a+2,4)+(1,9+a)(a-1,9)$;

4) $(17+a)(17-a)-(0,6-a)(a+0,6)$.

Докажите тождество:

1) $(x-1,6)(1,6+x)+5-x^2=2,44$;

2) $(2-0,9x)(0,9x+2)-10+0,81x^2=-6$;

3) $(x-1,5)(1,5+x)+(6-x)(6+x)=33,75$;

4) $(2,1-x)(x+2,1)-(5-x)(x+5)=-20,59$.

Выполните умножение

1) $(4a^2-y)(y+4a^2)$; 2) $(0,3b^3+x)(0,3b^3-x)$;

3) $(1,1c^2+z^2)(z^2-1,1c^2)$; 4) $(21d^2-k^3)\cdot(21d^2+k^3)$;

5) $(5a^2-4b^2)(4b^2+5a^2)$; 6) $(1,9c^4+6d)(6d-1,9c^4)$.

1) $\left(\frac{1}{3}a - \frac{1}{2}b\right)\left(\frac{1}{3}a + \frac{1}{2}b\right)$; 2) $\left(1\frac{4}{7}x^3 - z^2\right)\left(1\frac{4}{5}x^3 + z^2\right)$;

3) $\left(\frac{2}{3}m + \frac{3}{4}n\right)\left(\frac{2}{3}m - \frac{3}{4}n\right)$; 4) $\left(m^6 - 2\frac{1}{3}n^2\right)\left(2\frac{1}{3}n^2 + m^6\right)$.

1) $(0{,}2a - 1{,}3b)(0{,}2a + 1{,}3b)$; 2) $(0{,}1x^4 + 2{,}5z)(0{,}1x^4 - 2{,}5z)$;

3) $(a^2 - b^2)(a^2 + b^2)$; 4) $(x^4 + y^3)(x^4 - y^3)$;

5) $(7t^2 - 3y)(7t^2 + 3y)$; 6) $(4a^2 + 9c^4)(4a^2 - 9c^4)$.

Разложите на множители

1) $x^3 - 100x$; 2) $2y^3 - 32y$; 3) $0{,}16y^6 - y^4$;

4) $\frac{2}{3}x^5 - \frac{8}{27}x^3$; 5) $\frac{9}{16}x^4 - \frac{16}{9}x^2$; 6) $3y^3 - \frac{3}{25}y^5$.

1) $x^4 - 0{,}49y^2$; 2) $-0{,}64z^4 + t^6$; 3) $0{,}81a^6 - b^4$;

4) $\frac{361}{100}m^2 - n^{10}$; 5) $c^6 - \frac{289}{324}d^4$; 6) $5{,}76x^{12} - \frac{4}{81}y^8$.

Представьте в виде произведения:

1) $m^2 - n^2 - m + n$; 2) $9x^2 - 4y^2 - 3x + 2y$;

3) $x^3 + 3x^2 - 4x - 12$; 4) $81 - (3 - 8y)^2$;

5) $(x + 5)^2 - 16$; 6) $36 - (y + 1)^2$;

7) $(3x - 7)^2 - 25$; 8) $(4 - 5x)^2 - 64$.

Вычислите

1) $\frac{20^2 - 13^2}{31^2 - 24^2}$; 2) $\frac{17^2 - 22^2}{49^2 - 10^2}$;

3) $\frac{37^2 - 47^2}{72^2 - 12^2}$; 4) $\frac{100^2 - 60^2}{70^2 - 90^2}$.

1) $\frac{38^2 - 28^2}{47^2 - 19^2}$; 2) $\frac{53^2 - 25^2}{79^2 - 51^2}$;

3) $\frac{181^2 - 61^2}{319^2 - 77^2}$; 4) $\frac{200^2 - 380^2}{120^2 - 160^2}$.

Представьте в виде многочленов произведения

1) $(5 - a)(5 + a) \cdot (25 + a^2)$;

2) $(3x + 2)(3x - 2)(9x^2 + 4)$;

3) $\left(\frac{1}{3} \quad 2b\right)\left(\frac{1}{3} - 2b\right)\left(\frac{1}{9} + 4b^2\right)$;

4) $\left(6c^2 \quad \frac{2}{7}\right)\left(6c^2 - \frac{2}{7}\right)\left(36c^4 \quad \frac{4}{49}\right)$.

1) $(a \quad y)(a \quad y)(a^2 \quad y^2)$; 2) $(7x \quad 1)(7x - 1)(49x^2 \quad 1)$;

3) $(x \quad 6y^2)^2 \cdot (x \quad 6y^2)^2$; 4) $(8 \cdot x^2)(8 \quad x^2) \cdot (64 \quad x^4)$;

5) $(25x^2 \quad y^2)(5x \quad y)(5x \quad y)$; 6) $(81a^4 \quad 16b^4)(9b^2 \quad 4a^2)(4a^2 \quad 9b^2)$.

Найдите корни уравнений:

1) $x^3 \quad 3x^2 \quad x \quad 3x \quad 0$; 2) $x^3 \quad x^2 \quad x \quad 1 \quad 0$;

3) $(4 \quad 3x)^2 \quad (3x \quad 5)^2 \quad 96$; 4) $\left(\frac{1}{2} \quad 5x\right)^2 - \frac{3}{4} \quad (5x \quad 4)^2$;

5) $x(x \quad 2) \quad (x \quad 3)(x \quad 3) \quad 13$; 6) $4x(x \quad 1) \quad (2x \quad 5)(2x \quad 5) \quad 1$.

Решите неравенство:

1) $(10 \quad x)(x \quad 10) \quad x \quad x \quad 90$;

2) $y^2 \quad (y \quad 8)(8 \quad y) \quad 4 \quad 32 \quad y$;

3) $x(x \quad 0,3) \quad (x \quad 0,3)(x \quad 0,3) \quad 0,1$;

4) $27 \quad (1,2 \quad y)(y \quad 1,2) \quad 1,44 \quad y^2 \quad y$.

Докажите тождество:

1) $(1 \quad a)(1 \quad a)(1 \quad a^2) \quad 5 \quad a^4 \quad 4$;

2) $5a^2 \quad 3(a \quad 1)(a \quad 1) \quad 5a^2 \quad 5 \quad 10a^2 \quad 8$;

3) $7(a^2 \quad 2) \quad 4(a \quad 3)(a \quad 3) \quad 3a^2 \quad 24 \quad 6a^2 \quad 74$;

4) $10(a^2 - 15) \quad 12(a \quad 4)(a \quad 4) \quad 8 \quad a^2 \quad 50 \quad 3a^2$.

Представьте в виде произведения выражение:

1) $25a^4x^6z^{10} \quad 9b^6y^2z^{10}$; 2) $(9a^4 \quad 4b^6)a^2b^2 \quad 12a^4b^6$.

Укажите, при каком наименьшем натуральном k значение выражения:

1) $(k \quad 3)^2 \quad (k \quad 3)^2$ делится на 15;

2) $(7k \quad 2)^2 \quad (7k \quad 2)^2$ делится на 21?

Рассмотрим квадрат двучлена $(a + b)$, равного сумме двух выражений.

Вам известно, что $(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$.

По правилу умножения многочлена на многочлен получим:

$$(a + b) \cdot (a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Значит, $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

Как видно, полученная формула позволяет представить квадрат суммы двух выражений в виде суммы трех одночленов (трехчлена).

Формула $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ называется *формулой квадрата суммы двух выражений*.

Чтение формулы $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$:

— *квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения плюс удвоенное произведение первого выражения на второе плюс квадрат второго выражения.*

Геометрическая иллюстрация формулы квадрата двучлена показана на рисунке 32.1.

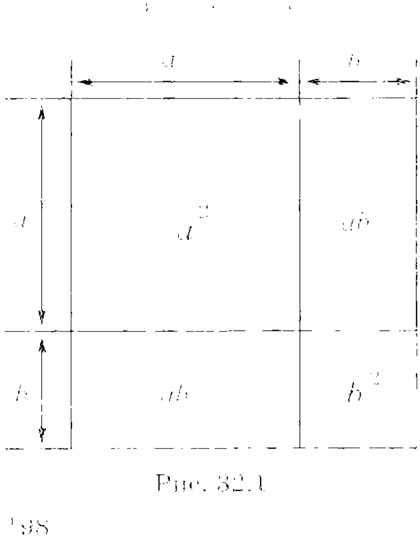


Рис. 32.1

Пример 1. Представим квадрат двучлена $(5n + 2m)^2$ в виде трехчлена.

Решение. Используем формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, т.е. вместо a запишем $5n$, вместо b – $2m$. Получим: $(5n + 2m)^2 = (5n)^2 + 2 \cdot (5n) \cdot (2m) + (2m)^2 = 25n^2 + 20nm + 4m^2$.

Ответ: $25n^2 + 20nm + 4m^2$.

Пример 2. Представим трехчлен $0{,}49c^2 + 1{,}4cd + d^2$ в виде квадрата двух выражений.

Решение. Воспользуемся формулой $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Для этого сначала преобразуем данный трехчлен следующим образом:

$$0{,}49c^2 + 1{,}4cd + d^2 = (0{,}7c)^2 + 2 \cdot (0{,}7c) \cdot d + d^2.$$

В правой части последнего равенства видим квадрат одного члена плюс удвоенное произведение этого члена на второй член и плюс квадрат второго члена. Поэтому

$$(0{,}7c)^2 + 2 \cdot (0{,}7c) \cdot d + d^2 = (0{,}7c + d)^2.$$

Ответ: $(0{,}7c + d)^2$.

Формула $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ называется *формулой квадрата разности двух выражений*.

Чтение формулы $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$:

– *квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения, минус удвоенное произведение первого выражения на второе и плюс квадрат второго выражения*.

По аналогии с доказательством формулы квадрата суммы двух выражений самостоятельно докажите формулу квадрата разности двучлена.

Доказательство формулы квадрата разности двучлена двух выражений можно провести геометрическим способом с помощью рисунка 32.2.

На рисунке изображены квадрат со стороной длиной a, площадь которого равна: $S_1 = a^2$; квадрат со стороной длиной $(a-b)$, площадь которого равна: $S_2 = (a-b)^2$; два равных прямоугольника, стороны которых длиной $(a-b)$ и b равны, площади их равны: $S_3 = (a-b) \cdot b$ и квадрат со стороной длиной b, площадь которого равна $S_4 = b^2$.

Площадь большого квадрата S_1 состоит из суммы площадей S_2, $2S_3$ и S_4, т. е. $S_1 = S_2 + 2S_3 + S_4$. Подставляя вместо S_1, S_2, S_3 и S_4 их значения, выраженные через a, b $(a-b)$, имеем:

$a^2 = (a-b)^2 + 2(a-b) \cdot b + b^2$, или: $a^2 - 2(a-b) \cdot b - b^2 = (a-b)^2$. Отсюда: $a^2 - 2ab + 2b^2 - b^2 = (a-b)^2$, или: $a^2 - 2ab + b^2 = (a-b)^2$.

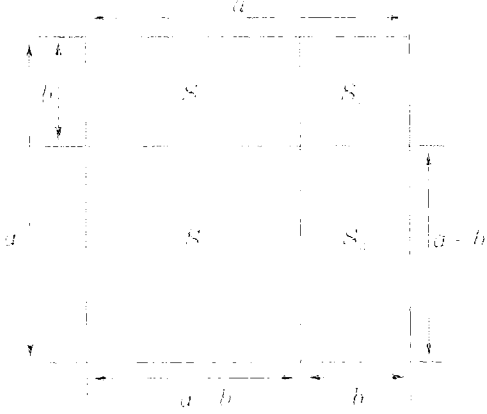


Рис. 32.2

Пример 3. Представим квадрат разности двух выражений $\left(\frac{1}{4}n - 3m^2\right)^2$ в виде трехчлена.

Решение. Используя формулу квадрата разности $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$, вместо a запишем $\frac{1}{7}n$, вместо b – $3m^2$.

Получим:

$$\left(\frac{1}{7}n - 3m^2\right)^2 = \left(\frac{1}{7}n\right)^2 - 2\cdot\left(\frac{1}{7}n\right)\cdot(3m^2) + (3m^2)^2 = \frac{1}{49}n^2 - \frac{6}{7}nm^2 + 9m^4.$$

Ответ: $\frac{1}{49}n^2 - \frac{6}{7}nm^2 + 9m^4$.

Пример 4. Представим трехчлен $0{,}36a^6 - 9{,}6a^3b + 64b^2$ в виде квадрата разности двух выражений.

Решение. Чтобы использовать формулу квадрата разности двух выражений, сначала перепишем $0{,}36a^6 - 9{,}6a^3b + 64b^2$ в следующем виде:

$$0{,}36a^6 - 9{,}6a^3b + 64b^2 = (0{,}6a^3)^2 - 2\cdot(0{,}6a^3)\cdot(8b) + (8b)^2.$$

В правой части последнего равенства получили квадрат одного члена (выражения) минус удвоенное произведение этого члена (выражения) на второй член (выражение) и плюс квадрат второго члена (выражения).

Поэтому $(0{,}6a^3)^2 - 2\cdot(0{,}6a^3)\cdot(8b) + (8b)^2 = (0{,}6a^3 - 8b)^2$. Следовательно, $0{,}36a^6 - 9{,}6a^3b + 64b^2 = (0{,}6a^3 - 8b)^2$.

Ответ: $(0{,}6a^3 - 8b)^2$.

Легко заметить, что формулы квадрата суммы и квадрата разности двух выражений можно записать одним равенством:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2.$$

Представьте в виде многочлена:

1) $(m - 3)^2$; 2) $(x - 5)^2$; 3) $(6 - y)^2$; 4) $(b - 9)^2$;
5) $(4 - d)^2$; 6) $(p - q)^2$; 7) $(z^2 - y)^2$; 8) $(a - 1)^2$.

1) $\left(a + \frac{1}{7}\right)^2$; 2) $\left(\frac{1}{9} + b\right)^2$; 3) $\left(\frac{n}{4} + \frac{m}{3}\right)^2$; 4) $\left(\frac{k}{2} - \frac{t}{5}\right)^2$;

5) $\left(4\frac{1}{3} - x\right)^2$; 6) $\left(y - 3\frac{1}{4}\right)^2$; 7) $\left(z - 5\frac{1}{5}\right)^2$; 8) $\left(4\frac{1}{2} + t\right)^2$.

Вычислите, представив в виде суммы или разности основание степени:

1) 101^2; 2) 102^2; 3) 103^2; 4) 104^2;

5) 99^2; 6) 98^2; 7) 97^2; 8) 96^2.

Представьте в виде квадрата двучлена трехчлены:

1) $a^2 - 2a + 1$; 2) $b^2 - 8b + 16$; 3) $c^2 + 10c + 25$;

4) $n^2 - 14n + 49$; 5) $100 - 20z + z^2$; 6) $81 + 18b + b^2$.

1) $0{,}16 - 0{,}8t + t^2$; 2) $z^2 + 1{,}4z + 0{,}49$;

3) $0{,}36 - 1{,}2b + b^2$; 4) $2{,}25 - 3x + x^2$;

5) $y^2 - 3{,}2y + 2{,}56$; 6) $3{,}61 - 3{,}8d + d^2$.

1) $\frac{4}{9} + \frac{4}{3}a + a^2$; 2) $\frac{9}{25} + \frac{6}{5}b + b^2$;

3) $\frac{16}{49} + \frac{8}{7}c + c^2$; 4) $\frac{100}{121}k^2 - \frac{20}{11}tk + t^2$;

5) $m^2 - \frac{22}{13}mn + \frac{121}{169}n^2$; 6) $\frac{100}{441}t^2 - \frac{40}{21}nt + n^2$.

1) $\frac{25}{4} + 5x + x^2$; 2) $\frac{9}{16} - \frac{3}{2}y + y^2$;

3) $\frac{49}{36} - \frac{7}{3}z + z^2$; 4) $n^2 - \frac{9}{4}cn + \frac{81}{64}c^2$;

5) $m^2 - \frac{11}{6}m + \frac{121}{144}$; 6) $t^2 - \frac{17}{5}dt + \frac{289}{100}d^2$.

Упростите выражения:

1) $(x + 5) \cdot 6 - (x - 3)^2$; 2) $(y - 4)^2 - (y - 2) \cdot 8$;

3) $26 - a^2 - (5 - a)^2$; 4) $(k - 7)^2 - 14k - 50$;

5) $0{,}3 - b^2 - (b - 0{,}5)^2$; 6) $15 + (0{,}4 - c)^2 - 0{,}8c^2$.

1) $(a - 4b)^2 - 8ab - 17b$; 2) $9c^2 - (3c + d)^2 - d^2$;

3) $(5a - 6)^2 - (5a - 6)(5a + 6)$; 4) $(7b - t)(t + 7b) - (7b + t)^2$;

5) $(9 - 8b)(2b - 3) - (4b - 1)^2$; 6) $(11c - 3)^2 - 2c(5{,}5c + 33)$.

1) $a(a - 2b) - (3b - a)^2$; 2) $(m + 8)^2 - (m - 2n)(m + 2n)$;

3) $3(b - 10)^2 + 5b - 5b^2$; 4) $(n + 15)^2 - n(n - 19)$;

5) $4c(9c - 3) - (6c - 1)^2$; 6) $(6 - 5m)(5m - 6) + (5m - 4)^2$.

Представьте в виде квадрата двучлена трехчлены :

1) $9x^2 - 12xy + 4y^2$; 2) $25t^2 - 30t + 9$;

3) $16k^2 - 40k + 25$; 4) $121a^2 - 44ac + 4c^2$;

5) $4n^2 - 52mn + 169m^2$; 6) $36t^2 - 84ts + 49s^2$.

1) $0,04x^2 - 1,2xy + 9y^2$; 2) $36c^2 + 6cd + 0,25d^2$;

3) $1,96k^2 - 14kl + 25l^2$; 4) $\frac{1}{49}a^2 - \frac{2}{21}ab + \frac{1}{9}b^2$;

5) $\frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{8}xy + \frac{9}{64}y^2$; 6) $81d^2 - \frac{27}{2}cd + \frac{9}{16}c^2$.

Разложите на множители трехчлены :

1) $5x^2 - 20x + 20$; 2) $2x^2 + 12x + 18$;

3) $-3x^2 + 18x - 27$; 4) $-2y^2 - 16y - 32$;

5) $6x^2 + 12x + 6$; 6) $-10a^2 + 20a - 10$.

1) $a^3 + 2a^2 + a$; 2) $x^2y - 6xy + 9y$;

3) $c^4 - 4c^3 + 4c^2$; 4) $2ay^2 - 4ay + 2a$;

5) $\frac{1}{9}a - \frac{8}{9}ab + \frac{16}{9}ab^2$; 6) $0,5cd - acd + 0,5a^2cd$.

Решите уравнения :

1) $(x + 11)^2 - x^2 = 11$; 2) $69 - (13 - y)^2 = -y^2$;

3) $44 + z^2 = (12 - z)^2$; 4) $31 - t^2 = -(t - 9)^2$.

1) $(a - 3)^2 - (a - 8)(a + 8) = 0$; 2) $(9 - b)(b + 9) + (4 - b)^2 = 0$;

3) $(c - 6)^2 - (7 - c)^2 = 0$; 4) $(d - 10)^2 - (1 - d)(d + 4) = 0$.

1) $x(x - 4) + 2 = (x - 1)^2$; 2) $(x - 2)(x - 3) + 3 = (x + 1)^2$;

3) $y(5 - y) + 1 = (y - 2)^2$; 4) $(y - 1)^2 - (y + 1)(y - 7) = 0$.

Решите неравенства

1) $n^2 - (n + 1)^2 > 2$; 2) $(1 - t)^2 - t^2 < 3$;

3) $(m - 2)^2 > 41 + m^2$; 4) $m^2 - 9 < (1 - m)^2$.

1) $x(x - 5) - (x - 3)^2 > 0$; 2) $(4 + y)^2 - y(6 + y) < 0$;

3) $(17 - y)^2 - y(y - 13) > 5$; 4) $z(z - 10) < (3 - z)^2$.

1) $(x + 9)(x - 2) - (x - 2)^2 > 0$; 2) $(10 - x)^2 + (x - 10)(10 - x) < 0$;

3) $(5 - x)(x + 5) - (x - 5)^2 > 0$; 4) $(4 - x)(2 - x) - (1 - x)^2 > 0$.

Запишите в виде многочлена степени

1) $(3x-8y)^2$; 2) $(7z+11d)^2$; 3) $(3,5t-4k)^2$;

4) $(5k-1,2t)^2$; 5) $\left(\frac{2}{3}a-\frac{3}{7}b\right)^2$; 6) $\left(\frac{7}{8}c-\frac{4}{7}d\right)^2$.

1) $(1,3m^2+4n^2)^2$; 2) $(2,5a^2+4b)^2$; 3) $\left(\frac{5}{2}p-0,5q^3\right)^2$;

4) $\left(2,4m^3-\frac{3}{4}t\right)^2$; 5) $\left(\frac{7}{4}+0,6b^2\right)^2$; 6) $\left(\frac{3}{8}a-\frac{2}{3}b^4\right)^2$.

Представьте в виде квадрата многочлен:

1) $a^{10}-10a^5b^8+25b^{16}$; 2) $a^6-6a^3x^4+9x^8$;

3) $81a^4-90a^2b^2c+25b^4c^2$; 4) $16x^6-24x^5+9x^4$.

Представьте в виде квадрата двучлена трехчлен:

1) $x^2-2+\frac{1}{x^2}$; 2) $\frac{x^2}{y^2}-2+\frac{y^2}{x^2}$;

3) $\frac{a^2}{b^2}-2a+b^2$; 4) $\frac{a^2}{4b^2}+2+\frac{4b^2}{a^2}$;

5) $\frac{1}{4x^2}+1+x^2$; 6) $\frac{9x^2}{4y^2}-\frac{1}{y}+\frac{1}{9x^2}$.

Упростите выражение:

1) $(11a-b)^2-(9a+7b)(8a-13b)$;

2) $(18x+5y)(2x-4y)-(6x-5y)^2$;

3) $4x(3x-2y)-(10y-0,4x)^2$;

4) $(15a+2b)^2-(3a-7b)(3b-5a)$.

Решите уравнение

1) $(2a-11)(11+2a)-(2a-5)^2=0$;

2) $(4-9b)^2+(9b+2)(2-9b)=0$;

3) $(2,5-8c)^2-(8c-1,5)(8c+1,5)=0$;

4) $\left(\frac{3}{4}-5d\right)^2-\left(5d+\frac{3}{4}\right)\left(5d-\frac{3}{4}\right)=0$.

1) $(7-8x)(2x-1)+(4x-1)^2=0$;

2) $(2x-5)^2-(2x-3)(2x+3)=15$;

3) $(3x-5)(3x+5)-(3x-1)^2=-4$;

4) $(9x+2)(1-4x)+(5-6x)^2=-32$.

Решите неравенства:

1) $(3,5 - x)(4x + 1) + (2x - 3)^2 < 0$;

2) $8(y - 5)^2 - (5 - y)(3 + 8y) \quad 2$;

3) $\left(3z + \frac{1}{3}\right)^2 - (1,5z + 1)(6z - 1) < 0$;

4) $\left(7z - \frac{1}{7}\right)^2 - (24,5z - 11)(2z - 1) \quad 0$.

1) $(4x - 3)(4x - 3) - (4x - 1)^2 \quad 3x$;

2) $3(x - 1)^2 - 3x(x - 5) > 21$;

3) $10(x - 2)^2 - 5x(2x - 1) \quad -30$;

4) $(5x + 6)^2 - (5x - 6)^2 > 12$.

1) $(3x - 1)^2 - 7 \quad (9x + 2)x + 2$;

2) $2x(8x + 3) + 1 \quad (5 - 4x)^2 - 1$;

3) $(0,3x - 0,2)^2 - 0,58x \quad 3,9 - (2 - 0,3x)(2 + 0,3x)$;

4) $(0,2 - 0,8x)^2 + 11,16 \quad (0,5 - 0,8x)^2 - 0,25$.

Докажите, что при любом значении переменной значение выражения равно отрицательному числу:

1) $5(3 - 5a)^2 - 5(3a - 7)(3a + 7) - 80a^2 + 150a \quad 300$;

2) $3(a - 1)^2 + 5(a + 1)(a - 1) - 8a^2 - 6a$;

3) $(m - 1)^2 - 4(m + 1)^2 + 3m^2 + 10m$;

4) $5(1 - y)^2 - (3 - y)^2 - 4y^2 + 16y$.

Докажите тождество:

1) $\left(\frac{3}{5}a^{3n+1}b^2 + \frac{2}{3}a^{n-1}b^3\right)^2 - \frac{4}{15}a^{2n}\,{}^{2}b(9a^{n}\,{}^{2} + 5b) + \frac{16}{25}a^{6n}\,{}^{2}b^4 =$
$= a^{6n}\,{}^{2}b$;

2) $\left(\frac{5}{6}x^{2n}\,{}^{1}y^{n} - \frac{3}{5}x^{n}\,{}^{1}y^{2}\right)^2 \quad \frac{1}{36}x^{3n}y^{n}\,{}^{2}(25x^{n}\,{}^{2}y^{n}\,{}^{2} - 36) =$
$= \frac{9}{25}x^{2n}\,{}^{2}y^{4}$.

Как рациональным способом можно найти куб суммы и куб разности двух выражений?

В предыдущем параграфе вы ознакомились с формулой квадрата суммы двух выражений $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Теперь представим куб суммы двух выражений, т. е. $(a + b)^3$ в виде многочлена. Для этого надо двучлен $a + b$ умножить сам на себя три раза, т. е.:

$$(a + b)^3 = (a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b).$$

Правую часть данного равенства запишем в следующем виде: $(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b) = (a + b)^2 \cdot (a + b)$. Первый множитель представляет собой квадрат суммы двух выражений. Поэтому, используя формулу $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, имеем: $(a + b)^2 \cdot (a + b) = (a^2 + 2ab + b^2)(a + b)$.

Применив правило умножения многочленов и приведя подобные слагаемые, получим:

$$(a^2 + 2ab + b^2)(a + b) = a^3 + 2a^2b + ab^2 + a^2b + 2ab^2 + b^3 =$$
$$= a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3.$$

Таким образом,

Формула $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ называется *формулой куба суммы двух выражений, или куба двучлена*.

Самостоятельно прочитайте формулу $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

Пример 1. Найдем куб суммы двух выражений $4m + 3n$.

Решение. Используя формулу куба суммы двух выражений, имеем:

$$(4m + 3n)^3 = (4m)^3 + 3 \cdot (4m)^2 \cdot 3n + 3 \cdot 4m \cdot (3n)^2 + (3n)^3 = 64\,m^3 +$$
$$+ 144\,m^2n + 108\,mn^2 + 27n^3.$$

Ответ: $64m^3 + 144\,m^2n + 108\,mn^2 + 27n^3$.

Пример 2. Представим многочлен $t^6 + 15t^4k + 75t^2k^2 + 125k^3$ в виде куба двучлена.

Решение. Перепишем данный многочлен в следующем виде:

$$t^6 + 15t^4k + 75t^2k^2 + 125k^3 = (t^2)^3 + 3 \cdot (t^2)^2 \cdot 5k + 3 \cdot t^2 \cdot (5k)^2 + (5k)^3.$$

В правой части этого равенства вы видите многочлен, который представляет собой куб первого члена, плюс утроенное произведение квадрата этого члена на второй член, плюс утроенное произведение первого члена на квадрат второго члена и плюс куб второго члена.

Поэтому, используя формулу куба двучлена, правую часть последнего равенства можно записать в виде куба двучлена:

$$(t^2)^3 + 3(t^2)^2 \cdot 5k + 3t^2 \cdot (5k)^2 + (5k)^3 = (t^2 + 5k)^3.$$

Таким образом,

$$t^6 + 15t^4k + 75t^2k^2 + 125k^3 = (t^2 + 5k)^3.$$

Ответ: $(t^2 + 5k)^3$.

Формула $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ называется *формулой куба разности двух выражений*.

Чтение формулы $(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$: *куб разности двух выражений равен кубу первого выражения минус утроенное произведение квадрата первого выражения на второй плюс утроенное произведение первого выражения на квадрат второго минус куб второго выражения.*

Самостоятельно докажите справедливость формулы:

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3.$$

Пример 3. Представим степень $\left(\frac{1}{4}p - s\right)^3$ в виде многочлена.

Решение. Используя формулу куба двучлена, имеем:

$$\left(\frac{1}{4}p - s\right)^3 = \left(\frac{1}{4}p\right)^3 - 3\cdot\left(\frac{1}{4}p\right)^2 \cdot s + 3\cdot\left(\frac{1}{4}p\right)\cdot s^2 - s^3 = \frac{1}{64}p^3 - \frac{3}{16}p^2s + \frac{3}{4}ps^2 - s^3.$$

Ответ: $\frac{1}{64}p^3 - \frac{3}{16}p^2s + \frac{3}{4}ps^2 - s^3$.

Пример 4. Представим многочлен $8x^3 - 3{,}6x^2y + 0{,}54xy^2 - 0{,}027y^3$ в виде куба разности двух выражений.

Решение. Перепишем данный многочлен в следующем виде:

$$8x^3 - 3{,}6x^2y + 0{,}54xy^2 - 0{,}027y^3 = (2x)^3 - 3\cdot(2x)^2\cdot(0{,}3y) + 3\cdot(2x)\cdot(0{,}3y)^2 - (0{,}3y)^3.$$

Нетрудно заметить, что правая часть последнего равенства представляет собой куб разности выражений $2x$ и $0{,}3y$. Следовательно,

$$(2x)^3 - 3(2x)^2\cdot(0{,}3y) + 3\cdot(2x)\cdot(0{,}3y)^2 - (0{,}3y)^3 = (2x - 0{,}3y)^3.$$

Таким образом, $8x^3 - 3{,}6x^2y + 0{,}54xy^2 - 0{,}027y^3 = (2x - 0{,}3y)^3$.

Ответ: $(2x - 0{,}3y)^3$.

Представьте в виде многочленов:

1) $(2+x)^3$; 2) $(a-2)^3$; 3) $(5-b)^3$; 4) $(y+3)^3$;
5) $(a-c)^3$; 6) $(c+d)^3$; 7) $(z-t)^3$; 8) $(k+m)^3$.

1) $(4x+1)^3$; 2) $(1-3y)^3$; 3) $(5z-2)^3$; 4) $(4x-3)^3$;
5) $(a+2x)^3$; 6) $(2y-3)^3$; 7) $(p-3q)^3$; 8) $(3n-2m)^3$.

1) $(0,2a+5)^3$; 2) $(4-0,5b)^3$; 3) $(0,6c-5)^3$;
4) $\left(\frac{1}{2}d-2\right)^3$; 5) $\left(\frac{1}{3}t+3\right)^3$; 6) $\left(2-\frac{1}{4}k\right)^3$.

1) $(4x+0,1y)^3$; 2) $(0,2a+30b)^3$; 3) $\left(\frac{1}{7}a-7c\right)^3$;
4) $(0,3b-10c)^3$; 5) $(0,5x-2y)^3$; 6) $\left(\frac{2}{9}n+\frac{9}{2}m\right)^3$.

Представьте в виде куба двучлена многочлены:

1) x^3-3x^2+3x-1; 2) y^3-3y^2+3y-1;
3) $8+12p+6p^2+p^3$; 4) $1-6q+12q^2-8q^3$;
5) $125-75a+15a^2-a^3$; 6) $0,008+0,12p+0,6p^2+p^3$.

1) $a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3$; 2) $27m^3+27m^2n+9mn^2+n^3$;
3) $8p^3+27q^3+54pq^2+36p^2q$; 4) $x^3y^3-6x^2y^2+12xy-8$.

Упростите выражение и найдите его значение при указанных значениях переменной:

1) $(3a-1)^3-27a^3+5$ при $a=-1; 0; 1$;
2) $(0,7b-2)^3-(0,7b+2)^3$ при $b=-2; -1; 1$;
3) $(5x-4)^3+(5x-2)^3-250x^3$ при $x=0,5; 0; -1$;
4) $(0,2+5y)^3-(0,5+2y)^3-117y^3$ при $y=-1; 0; 2$.

Решите уравнения:

1) $(x+1)^3-4x=5+x^2(x+3)$;
2) $(1-y)^3+8y=7+y^2(3-y)$;

3) $(x+1)^3 + (x-1)^3 - 2x^3 = 12$;

4) $(1-y)^3 + (1+y)^3 = 6y^2 - 3y - 1$.

1) $(2+x)^3 - x^2(6+x) = 11x + 19$;

2) $(z-2)^3 - z^2(z-6) = 13z - 7$;

3) $(y+3)^3 - 2y - 30 = y^2(9+y)$;

4) $(3-t)^3 + 3t - 21 = -t^2(t-9)$.

Докажите тождество:

1) $(3a+b)^3 - (a+3b)^3 - 18ab(a-b) = 26(a^3-b^3)$;

2) $(x+4y)^3 + (4x-y)^3 + 12xy(3x-5y) - 128y^3 = 65(x^3-y^3)$.

Представьте в виде многочлена степень:

1) $(a^2-b^2)^3$; 2) $(m^2+n^2)^3$; 3) $(2a^2+b^3)^3$;

4) $(x^4-6a^2)^3$; 5) $(7m^3-n^4)^3$; 6) $\left(a^3-\frac{1}{3}b^2\right)^3$;

7) $(0{,}3x^2-0{,}5y^2)^3$; 8) $\left(0{,}6x^3-\frac{1}{2}y^2\right)^3$; 9) $\left(\frac{1}{5}a^2+0{,}3b^2\right)^3$.

Представьте в виде куба двучлена многочлен:

1) $8x^3 - 60x^2y + 150xy^2 - 125y^3$;

2) $64a^{15} + 144a^{10}b^3 + 108a^5b^6 + 27b^9$;

3) $0{,}125a^9 - 0{,}15a^6b^4 + 0{,}06a^3b^8 - 0{,}008b^{12}$;

4) $0{,}216x^{12} + 0{,}54x^8y^5 + 0{,}45x^4y^{10} + 0{,}125y^{15}$.

Упростите выражения

1) $(x^2+1)^3 - 3(x^2-1)^2 - 5x(x-2) + 10$;

2) $(x-2)^3 - 20(2x-1)^2 - x(x-5)$;

3) $(1-3y)^3 - 3(y-3)^2 + 10y(y^2-2)$;

4) $(y^2+2)^3 - y^4(y^2+6) + 2(y-2)^2$.

1) $(x+5)^3 - (x+1)^3 = 4(3x^2+5) + 10x - 7$;

2) $(x-3)^3 - x^2(x-6) + 5x(5-3x) = 19x - 1$;

3) $(y+1)^3 - (3y+1)^3 + 7y^2(4y+9) = 24y^3 + 3$;

4) $(4y-5)^3 - (4y+5)^3 + 48y(1+10y) = 5 - 14y^2$.

Решите уравнения.

1) $(x+2)^3 - (x-2)^3 = 2x(6x+2)$;

2) $(x+3)^3 - (x-4)^3 = 21x^2 + 7$;

3) $(x + 2)^3 + 3x^2 - 11 = (x - 3)^3$;

4) $(x - 3)^3 - x^2(x - 9) = 27$.

1) $(6 - x)^3 - x^2(16 - x) = 2x^2 - 116$;

2) $(y - 7)^3 + y(13 - y^2) = -21y^2 - 23$;

3) $(4 - 3z)^3 + z(14 + 27z^2) = 108z^2 - 77$;

4) $(5x + 2)^3 - 25x(5x^2 - 4) = 150x^2 + 21$.

Найдите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства:

1) $(2 - 3x)^3 - 54x^2 \leqslant -27x^3 - 41x$;

2) $(3 + 2x)^3 - 36x^2 \geqslant 60x - 8x^3$.

Найдите наименьшее целое число, являющееся решением неравенства: :

1) $(x - 7)^3 + 42x^2 > (x + 7)^3 - 14 - 7x$;

2) $(6 + x)^3 - 220x \leqslant 2x^3 - (x - 6)^3 + 19$.

Докажите тождество:

1) $(b + 5)^3 - b(b - 5)^2 - 25(1 + b)^2 = 100$;

2) $5(1 - b)^2 + 5b(1 + b)^2 - (1 - 5b)^2 = 4$;

3) $(2b - 3)^3 - 4b^2(2b - 6) + 6b(2b - 9) = -27$;

4) $(b + 2)^3 - (2b - 1)^3 - 9b(b^2 + 2b + 2) - 10 = -1$.

Докажите, что при любых значениях переменных значение выражения равно нулю:

1) $(a - x)^3 - a(a - x)^2 - x^2(2a - x) + a^2x$;

2) $(a - 1)^3 + 3(a - 1)^2 + 3(a - 1) + 1 - a^3$;

3) $(x^2 + y^2)^3 - (x^2 - y^2)^3 - 3x^2y^2(x + y)^2 - 8x^2y^4$;

4) $(m - 3n)^3 - (2m - 3n)(3mn + (m - 3n)^2) + m^3$.

[illegible] двух выражений [illegible] способом?

При преобразовании выражений наряду с изученными формулами разности квадратов двух выражений

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

квадратов суммы и разности двух выражений

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

кубов суммы и разности двух выражений

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

широко используются формулы суммы и разности кубов двух выражений: $a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$.

Докажем справедливость формулы суммы кубов:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2).$$

Для этого преобразуем правую часть равенства, применив правила умножения многочлена на многочлен:

$$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 - a^2b + ab^2 + a^2b - ab^2 + b^3 = a^3 + b^3.$$

Чтение формулы $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$:

сумма кубов двух выражений равна произведению суммы этих выражений и неполного квадрата их разности.

Самостоятельно докажите справедливость формулы [illegible] $(a - b)(a^2 + ab + b^2)$. [illegible] $a + b$.

Рассмотрим на примерах применение формул суммы и разности кубов.

Пример 1. Разложим на множители выражение $n^6 + \frac{8}{125}m^3$.

Решение. Применим формулу суммы кубов:

$$n^6 + \frac{8}{125}m^3 = (n^2)^3 + \left(\frac{2}{5}m\right)^3 = \left(n^2 + \frac{2}{5}m\right)\left((n^2)^2 - n^2 \cdot \frac{2}{5}m + \left(\frac{2}{5}m\right)^2\right) =$$

$$= \left(n^2 + \frac{2}{5}m\right)\left(n^4 - \frac{2}{5}mn^2 + \frac{4}{25}m^2\right).$$

Ответ: $\left(n^2 + \frac{2}{5}m\right)\left(n^4 - \frac{2}{5}mn^2 + \frac{4}{25}m^2\right)$.

Пример 2. Упростим выражение: $8c^3 + (3 - 2c)(9 + 6c + 4c^2)$.

Решение. Применим формулу разности кубов:

$$8c^3 + (3 - 2c)(9 + 6c + 4c^2) = 8c^3 + 27 - 8c^3 = 27.$$

Ответ: 27.

Разложите на множители:

1) $a^3 + x^3$; 2) $y^3 - b^3$; 3) $t^3 - n^3$; 4) $m^3 + k^3$;
5) $z^3 - 8$; 6) $64 + s^3$; 7) $125 - x^3$; 8) $1000 + y^3$.

1) $27 - a^3$; 2) $b^3 - 125$; 3) $64 - m^3$; 4) $8 + q^3$;
5) $0{,}008 - a^3$; 6) $0{,}216 - b^3$; 7) $0{,}027 - n^3$; 8) $0{,}125 - m^3$.

1) $\frac{1}{8} - b^3$; 2) $\frac{1}{27} - c^3$; 3) $\frac{1}{64} - d^3$; 4) $\frac{1}{125} + t^3$;
5) $\frac{8}{27} - z^3$; 6) $y^3 - \frac{27}{64}$; 7) $k^3 + \frac{27}{125}$; 8) $\frac{1}{216} - z^3$.

Представьте произведение в виде многочлена:

1) $(a + 2)(a^2 - 2a + 4)$; 2) $(1 + x^2)(1 - x^2 + x^4)$;
3) $(k - 5)(k^2 + 5k + 25)$; 4) $(3 + m)(9 - 3m + m^2)$;
5) $(1 - a^2)(1 + a^2 + a^4)$; 6) $(4 - n^2)(16 + 4n^2 + n^4)$;
7) $(25 - 5y^2 + y^4)(5 + y^2)$; 8) $(64 + 8z^3 + z^6)(8 - z^3)$.

Упростите выражения:

1) $(x - 10)(x^2 + 10x + 100) - x^3$; 2) $216 - (a + 6)(a^2 - 6a + 36)$;
3) $y^3 - (7 - y)(49 + 7y + y^2)$; 4) $600 - (8 - z)(z^2 + 8z + 64)$.

1) $(a - 1)(a^2 + a + 1) - a^2(a - 8)$; 2) $(b + 2)(b^2 - 2b + 4) - b(b^2 - 1)$;
3) $2a^3 - 7(x^2 + x + 1)(x - 1)$; 4) $y^3 - (y - 3)(y^2 + 3y + 9)$.

Решите уравнение:

1) $(2x - 3)(4x^2 + 6x + 9) = 8x^3 - 2{,}7x$;

2) $(3 - 4x)(16x^2 + 12x + 9) + 64x^3 = -10x$;

3) $(5-2x)(4x^2+10x+25)=2{,}5x-8x^3$;

4) $(6-5x)(36+30x+25x^2)=108x-125x^3$.

Решите неравенство:

1) $(1-4x)(1+4x+16x^2)>6x^2-10x-70x^3$;

2) $99x^3+(1-5x)(1+5x+25x^2)>12x-26x^3$.

Докажите тождество:

1) $(5x-6)(25x^2+30x+36)-0{,}25(500x^3-864)=0$;

2) $91x^3-(3x-4)(9x^2+12x+16)-(3-4x)(9+12x+16x^2)=37$.

Разложите на множители многочлен:

1) a^3-27b^3; 2) $m^3n^3+k^3$; 3) x^6-y^6;

4) $k^6+(pq)^6$; 5) $(a-b)^3+b^3$; 6) $(x-2)^3-27$;

7) $8a^3+(a-b)^3$; 8) $27x^3-y^3(x-y)^3$.

Запишите в виде многочлена произведение:

1) $\left(x+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{9}-\frac{1}{3}x+x^2\right)$; 2) $\left(n-\frac{1}{2}\right)\left(n^2+\frac{1}{2}n+\frac{1}{4}\right)$;

3) $\left(\frac{1}{2}a+\frac{1}{3}b\right)\left(\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{6}ab+\frac{1}{9}b^2\right)$; 4) $\left(\frac{1}{4}y^2-yz+4z^2\right)\left(\frac{1}{2}y+2z\right)$.

Представьте в виде произведения многочлен:

1) $m^3-n^3+2n-2m$; 2) $3a^3-3b^3+5a^2-5b^2$;

3) $x^6+y^6+x^2+y^2$; 4) $a^3-b^3+a^2-b^2$;

5) $x^4+xy^3-x^3y-y^4$; 6) $a^4-a^3b+ab^3-b^4$.

Упростите выражения

1) $2a^3-9-2(a-1)(a^2+a+1)$;

2) $x(x-2)(x+2)-(x-3)(x^2+3x+9)$;

3) $3(b-1)^2+(b-2)(b^2+2b+4)-(b+1)^3$;

4) $(a+1)^3-4a(a+1)(a-1)+3(a-1)(a^2+a+1)$.

1) $(x+2)(x^2-2x+4)-x(x-3)(x+3)=42$;

2) $(x-3)(x^2+3x+9)-x(x^2-16)=21$;

3) $(2x-1)(4x^2+2x+1)-23=4x(2x^2+3)$;

4) $16x(4x^2-5)+17=(4x-1)(16x^2+4x+1)$.

Упростите выражение:

1) $6(x+1)^2 + 2(x-1)(x^2+x+1) - 2(x+1)^3$;

2) $5x(x-3)^2 - 5(x-1)^3 + 15(x+2)(x-2)$;

3) $(x+2)^3 - x(3x+1)^2 + (2x+1)(4x^2-2x+1)$.

Найдите корни уравнения:

1) $x^3 - (x-3)(x^2+3x+9) + 9x = -18x$;

2) $(x+4)(16-4x+x^2) - x(x^2+8) = -192$;

3) $y(y^2-5) - (y-2)(y^2+2y+4) + 3y = 0$;

4) $(5+y)(25-5y+y^2) - 20y - y^3 = 0$.

Докажите тождества

1) $(x+y)^3 - (x-y)^3 - 6y(x^2-y^2) = 8y^3$;

2) $(m+n)^3 - (m-n)^3 - 2n(m^2+n^2) = 4m^2n$;

3) $x^3 - 4 - (x+2)^2 + x(4+x) = x^3 - 8$.

1) $(a^2-3)^3 - (a^2-4)(a^2+4) - a^2(a^4-10a^2+27) + 27 = 16$;

2) $(b^2+3)^3 - (b^2+3)(b^4-3b^2+9) - 9b^2(b^2+3) = 0$;

3) $(m^2-1)(m^4+m^2+1) - (m^2-1)^3 + 3(m^2-1) = 3m^4 - 3$.

Как использовать формулы сокращенного умножения для рационального вычисления?

Формулы: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$ – разности квадратов;

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ – квадрата суммы;

$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ – квадрата разности;

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ – куба суммы;

$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ – куба разности;

$(a - b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$ – разности кубов;

$(a + b)(a^2 - ab + b^2) = a^3 + b^3$ – суммы кубов

называются *формулами сокращенного умножения.*

Применение формул сокращенного умножения позволяет упростить выражения. Рассмотрим, как используются эти формулы.

Пример 1. Упростим выражение $(4 - 5a)^2 - 8a(3a + 1) + (7a - 4)\cdot(4 + 7a)$.

Решение. Для упрощения данного выражения воспользуемся формулами квадрата разности и разности квадратов, правилом умножения одночлена на многочлен, а затем приведем подобные слагаемые. Тогда имеем:

$$(4 - 5a)^2 - 8a(3a + 1) + (7a - 4)(4 + 7a) =$$
$$= 16 - 40a + 25a^2 - 24a^2 - 8a + 49a^2 - 16 = 50a^2 - 48a.$$

Ответ: $50a^2 - 48a$.

Пример 2. Решим неравенство $(5 - 2x)^2 - 8x \le 2x(2x - 6) + 9$.

Решение. $25 - 20x + 4x^2 - 8x \le 4x^2 - 12x + 9$;

$-20x + 4x^2 - 8x - 4x^2 + 12x \le 9 - 25$;

$-16x \le -16$;

$x \ge 1$.

Ответ: $[1; +\infty)$.

Пример 3. Докажем тождество: $4(b - 5)^2 - (b - 3)(b^2 + 3b + 9) + (b + 4)^3 - 8b(2b + 1) = 191$.

Доказательство. $4(b - 5)^2 - (b - 3)(b^2 + 3b + 9) + (b + 4)^3 - 8b(2b + 1) = 4(b^2 - 10b + 25) - (b^3 - 27) + b^3 + 12b^2 + 48b + 64 - 16b^2 - 8b = 4b^2 - 40b + 100 - b^3 + 27 + b^3 - 4b^2 + 40b + 64 = 191$.

Упростите выражения:

1) $(m^2 - 6n^2)^2 - (6n^2 - m^2)^2$; 2) $(x^2 - 7y^2)^2 - (x^2 - 7y^2)^2$;

3) $(9z - 2x^2)^2 - (2x^2 - 9z)^2$; 4) $(5a^3 - 4b)^2 - (4b - 5a^3)^2$.

1) $(1,1x^2 - 6y)^2 - (1,1x^2 - 6y)(1,1x^2 + 6y)$;

2) $(2,3a - 7b^2)(2,3a + 7b^2) - (2,3a + 7b^2)^2$;

3) $(3,1n^2 - 5m)^2 - (5m - 3,1n^2)(5m + 3,1n^2)$.

1) $1000 - a^6 + (a^2 - 10)(a^4 + 10a^2 + 100)$;

2) $(a^3 - 9)(a^6 + 9a^3 + 81) - a^9 + 729$;

3) $0,512t^3 - 100 + (0,8t + 5)(0,64t^2 - 4t + 25)$;

4) $(1,1d - c^2)(1,21d^2 + 1,1c^2d + c^4) - 1,331d^3 + 2c^6$.

1) $(2 + a^4)(a^8 - 2a^4 + 4) - a^{10}(1 - a^2)$;

2) $k^2(k - 1) - (3 + k^2)(k^4 - 3k^2 + 9)$;

3) $(25 - 5y^4 + y^8)(5 + y^4) - y^9(y^3 - 1)$;

4) $(z^4 - 7z^2 + 49)(z^2 + 7) + z(1 - z^5)$.

Решите уравнение:

1) $35 + (5x - 1)(5x + 1) = (5x - 2)^2$;

2) $3 + (2x - 3)^2 = 4(x - 6)(6 + x)$;

3) $6 - x = (2x - 1)^2 - 4(x - 3)^2$;

4) $39x - (4x + 3)^2 = 2 - 4(2x + 1)^2$.

1) $7x - (x - 2)^2 = 13 - x(x - 6)$; 2) $10 + (3 - x)^2 = x(9 - x) + 17$;

3) $-16 + (4 - x)^2 = x(x - 12)$; 4) $11 - x(x + 9) = 8x - (x - 3)^2$.

Найдите корни уравнения:

1) $(x - 7)^2 - 49 = 0$; 2) $(6 + y)^2 - 81 = 0$;

3) $100 - (z - 19)^2 = 0$; 4) $25 - (13 + t)^2 = 0$.

Решите уравнения:

1) $x(0,25x - 3) - (0,5x - 1)(0,5x + 1) = 0$;

2) $(1,2 - x)(x + 1,2) + 1,8x + x^2 = 0$;

3) $0,49x^2 - 3x - (0,7x + 2)(0,7x - 2) = 0$;

4) $(1,6x + 1)(1 - 1,6x) + 64x(1 - 0,04x) = 0$.

1) $(7x - 5)^2 + 67x - 49x^2 = -2$;

2) $196x^2 - (14x - 3)^2 + 80x = -5$;

3) $2{,}89x^2 - (1{,}7x - 2)^2 = 0{,}2x = 11$;

4) $(2{,}4x - 1)^2 - 0{,}2x = 5{,}76x^2 = 3$.

1) $5(2 - x)^2 - 5x^2 = 28x = 30x^2$;

2) $54x^2 - 6(x - 3)^2 = 162 + 6x^2$;

3) $(x - 9)(x^2 + 9x + 81) = 7 - 4x - x^3$;

4) $x^3 - 2x = 331 = (x^2 + 11x + 121)(x - 11)$.

Решите неравенства

1) $(x - 8)^2 - x^2 = 11x$;

2) $x^2 - (9 - x)^2 > 2x$;

3) $(12 - x)^2 - x^2 = 21x$;

4) $x^2 - (25 - x)^2 + 25x$.

1) $(y - 7)^3 - y^3 - 21y^2 = 0$;

2) $24y^2 + (8 - y)^3 + y^3 = 0$;

3) $(6 - y)^3 + y^3 - 18y^2 = 0$;

4) $y^3 - 27y^2 - (y - 9)^3 = 0$.

1) $(10 + x)(100 - 10x + x^2) - x^3 - 500x = 0$;

2) $x^3 + 675x - (15 + x)(225 - 15x + x^2) = 0$;

3) $(169 - 13x + x^2)(x + 13) - x^3 - 2262x = 0$;

4) $1331x - x^3 - (11 + x)(x^2 - 11x + 121) = 0$.

Докажите тождества

1) $(3x + 4y)^2 - (4y - 3x)^2 = 48xy$;

2) $(1{,}5x - 2y)^2 + (2x + 1{,}5y)^2 = 6{,}25(x^2 + y^2)$;

3) $(2a - 3b)^3 - (2a + 3b)^3 = -18b(4a^2 + 3b^2)$;

4) $(3a + 2b)^3 - (3a - 2b)^3 = 18a(3a^2 + 4b^2)$.

1) $(5z^2 - 6k)^2 - (5z^2 + 3k)^2 = 90z^2k + 27k^2$;

2) $(m^2 - n^2)(m^2 + n^2) - m^2(m^2 - n^2) = m^2n^2 = -n^4$;

3) $(1{,}2x^4 - 7y^2)(1{,}2x^4 + 7y^2) + 0{,}56x^8 - 49y^4 = 2x^8$;

4) $(1{,}4a^3 - 5b^2)(1{,}4a^3 + 5b^2) - 2{,}96a^6 + 25b^4 = -a^6$.

Упростите выражени

1) $(4x^2 - 1)(9x^2 - 5) - (6x^2 - 1)^2$;

2) $(x^4 - 1)^2 - (x^4 + 4) \cdot (x^4 - 6)$;

3) $(x^2 - 3)(x^2 + 7) - (x^2 + 2)^2$;

4) $(x^2 + 9)(11 - x^2) - (x^2 + 1)^2$.

1) $(a^3 + b^3)^2 - (a^3 - b^3)^2 - 2b^6$;

2) $(1 + a^3b^3)^2 - (a^3b^3 - 1)^2 - 2$;

3) $3a^4b^4(a^4 - b^4) - (a^4 - b^4)^3$;

4) $(c^2 - d^2)^3 - 3c^2d^2(c^2 - d^2)$.

Решите уравнения

1) $3(x - 10)^2 - 11(x + 5)^2 = -3x^2 - 170x - 1600$;

2) $2{,}5(4 - x)^2 - 7(5 - x)(5 + x) = 295 - 1{,}5x^2$;

3) $1,9(y+20)(20-y) - 1,6(y+20)^2 = 116 - 3,5y^2$;

4) $30(1,8-y)^2 + 20(y+1,8)(y-1,8) = 50y^2 + 140,4$.

1) $(2,3x-10)(5,29x^2+23x+100) - 125x = 12,167x^3$;

2) $(20+1,7x)(2,89x^2-34x+400) - 400x = 4,913x^3$;

3) $5(x-6)^3 - 13(2-x)^3 + 32 = -8x^2(x+21)$;

4) $-6(4+x)^3 + 3(5-x)^3 = 1017 - 9x^2(3+x)$.

Решите неравенства:

1) $(9x-7)^2 - 10 \leqslant (9x+3)(9x-5)$;

2) $(3+7x)^2 - x \leqslant -26 + x(49x-8)$;

3) $(11-25x)x + 7 < (5x-7)^2 - 3x$;

4) $4 + (6-11x)^2 > 25x + x(121x+3)$.

1) $13 + x^2(x-9) \leqslant (x-3)^3 + 11$;

2) $26 + (2+x)^3 < x^2(6+x)$;

3) $3x - x^2(15+x) > -(x+5)^3 - 4x$;

4) $(4+x)^3 - 6x \leqslant x^2(x+12) + 1$.

Найдите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства:

1) $(3-x)(9+3x+x^2) - 2x + x^3 \geqslant 7x + 7$;

2) $(x-7)(x^2+7x+49) < -4x + x^3 + 17$;

3) $7x - x^3 > 27x - (x+8)(x^2-8x+64)$;

4) $16x(32x^2+1) \leqslant -32 + (8x-1)(64x^2+8x+1)$.

Найдите наименьшее целое число, являющееся решением неравенства:

1) $(x+9)^2 - x^2 > 15x - 79$; 2) $x^2 - (11-x)^2 < 23x + 19$;

3) $(x-8)^3 + 24x^2 \geqslant x^3 + 64x$; 4) $x^3 - (7+x)^3 \geqslant -21x^2 - 490$.

Докажите тождества:

1) $((a^7-8b^4)(8b^4+a^7)+63b^8)^2 - a^{14}(-2b^8+a^{14}) = b^{16}$;

2) $b^{24} - (82c^{10} + (b^6-9c^5)(9c^5+b^6))^2 + c^{20} = -2c^{10}b^{12}$;

3) $(x^3-9y^4)^2 - (x^3+9y^4)^2 + 36x^3(y^4-x) = -36x^4$;

4) $0,5z^4(40zt^2-5) - (z^5+10t^2)^2 + (10t^2-z^5)^2 = -2,5z^4 - 20z^5t^2$.

1) $(a^7-t^5)(a^{14}+a^7t^5+t^{10}) + (t^5-a^7)^3 - 3a^{14}t^5 = -3a^7t^{10}$;

2) $(x^4+b^6)^3 - (b^6+x^4)(b^{12}-x^4b^6+x^8) - 3x^8b^6 = 3x^4b^{12}$.

[illegible]

В математике часто рассматриваются различные проблемные реальные ситуации, которые надо решить. Для этого используются математический язык, различные математические правила и составляется математическая модель.

Многие проблемные реальные ситуации можно решить арифметическим способом, т. е. найти ответ на вопрос задачи с помощью выполнения арифметических действий над числами. Существует много практических задач, которые решаются алгебраическим способом, т. е. с помощью уравнений.

При решении задачи алгебраическим способом нужно четко придерживаться следующего алгоритма:

1) искомую величину или несколько величин обозначают буквами x, y, z ...;

2) устанавливают взаимосвязи между данными и искомыми величинами;

3) составляют уравнение или неравенство, или систему уравнений или неравенств (математическую модель);

4) решают составленное уравнение или неравенство, или систему уравнений или неравенств;

5) проверяют полученный результат на соответствие с условием задачи;

6) записывают ответ задачи.

[illegible]

Математическая модель может быть представлена в виде уравнения или системы уравнений с переменными, или системы неравенств, в виде таблицы, схематичного рисунка и [illegible] только [illegible] задач.

Пример [illegible] Число [illegible] больше, чем [illegible] будет [illegible] пять [illegible] чем [illegible]

[illegible] число [illegible] ов с

1) [illegible] изготовила [illegible]?
2) [illegible] деталей [illegible] 36 [illegible] дет., [illegible]
3) [illegible] рабочего [illegible]

[illegible] имеет [illegible] 9 м². [illegible] площадь [illegible] 1,8 м², [illegible] окон [illegible] площадь [illegible] 7,2 [illegible]

1) [illegible] оклейки комнаты.
2) [illegible] обоев 65 [illegible] один рулон?

Сколько [illegible] воды потребуется [illegible] пустого [illegible] параллелепипеда, [illegible] который [illegible] равен объёму [illegible] 45 [illegible]?

[illegible] прямоугольного [illegible] которого [illegible], если [illegible] 4500 дм³.

[illegible] прямоугольного [illegible] со[illegible]

1) [illegible] 3500 дм³.
2) [illegible] для [illegible]?

[illegible] как [illegible] 162 [illegible].
1) [illegible] прямоугольного [illegible].
2) [illegible] уменьшить на [illegible]?

[illegible] равна [illegible]

[illegible] уменьшить на [illegible]

[illegible] 2, а из [illegible]

[illegible] дробь.

Вкладчик открыл в банке депозит на [illegible] 10 % годовых. Через год он снял с депозита 60 000 тг, в результате на депозите осталась сумма, равная половине первоначального взноса. Какая сумма будет на депозите в конце второго года?

От пристани A отошел плот и одновременно с ним от пристани B отплыла моторная лодка вверх по течению реки по направлению к A. Найдите собственную скорость лодки, если лодка и плот встретились через 2 ч, а путь, пройденный лодкой и плотом, равен 16 км.

От пристани вниз по течению реки отплыла лодка, скорость которой в стоячей воде равна 12 км/ч. Через 1 ч вверх по реке отправился катер, собственная скорость которого равна 18 км/ч. Найдите скорость течения реки, если через 3 ч после выхода лодки длина пути, пройденного лодкой и катером, будет равна 75 км.

Среди 400 000 жителей города 60 % не интересуются футболом. Среди футбольных болельщиков 75 % смотрели по телевидению финал Лиги чемпионов.

1) Сколько жителей этого города смотрели этот матч?

2) Какой процент жителей города смотрели этот матч?

3) Какой процент жителей города не смотрели этот матч?

Глава семьи решил положить на депозит в банк 250 000 тг. Часть этих денег он положил на счет, процентный прирост которого составляет 10 %. Оставшуюся часть положил на депозит под 9 % годовых, но с которого можно снимать деньги до неснижаемого остатка в 50 000 тг. Через год на депозитах были суммы в 274 000 тг.

1) Какая сумма была положена на депозит, прирост которого составляет 10 % годовых?

2) Какая сумма была через год на депозите, прирост которого составляет 9 % годовых?

3) На сколько тенге выгоднее положить всю сумму на депозит под 10 % годовых?

Первый оператор на компьютере перепечатает [illegible] за 9 ч, второй оператор — за 6 ч. После того как первый оператор работал 2 ч, ему поручили другую работу. Оставшуюся часть рукописи набрал второй оператор.

1) За сколько часов второй оператор набирает [illegible] работы?

2) За какое время выполнена вся работа?

3) Если половину работы выполнит один оператор, а другую половину второй оператор, то за какое время будет выполнена вся работа?

4) Если оба оператора одновременно набирают рукопись, то за какое время будет выполнена вся работа?

Найдите такие двузначные числа, сумма цифр которых не больше 12, а цифра десятков втрое больше цифры единиц.

Средняя скорость автобуса больше 60 км/ч, но меньше 80 км/ч.

1) За какое время автобус может пройти путь в 240 км?

2) Какая должна быть скорость автобуса, чтобы проехать это расстояние не более чем за 3 ч 20 мин?

1) Значение суммы двух двузначных чисел равно 26, а значение разности их квадратов равно 132. Найдите эти числа.

2) Составьте сюжетную задачу, решение которой приводит к уравнению:

а) $x(x-3)=28$;

б) $\frac{12}{17-x}+\frac{40}{17+x}=1$;

в) $\frac{20}{50-x}+\frac{10}{10+x}=1$.

При делении 18 на значение суммы цифр другого двузначного числа получим в частном число 1. Разность квадратов цифр этого двузначного числа равна 2[illegible]. Найдите двузначное число.

1) Расстояние от пункта A до пункта B равно 180 км. Если автомобиль увеличит скорость на 20 км/ч, то за 2 ч он проедет больше 180 км. Если он уменьшит скорость на 20 км/ч, то даже за 3 ч не успеет доехать до пункта B. Какова скорость автомобиля?

2) Расстояние между двумя пристанями по озеру равно 36 км. Если моторная лодка увеличит скорость на 2 км/ч, то за 3 ч она пройдет более 36 км. Если же уменьшит на 2 км/ч, то за 4 ч еще не доплывет до пункта назначения. Какова скорость моторной лодки?

3) Расстояние между двумя мотоциклистами равно 7[illegible] км. Скорость одного из них равна [illegible] км/ч, другого — [illegible] км/ч. Через какое время расстояние между мотоциклистами будет [illegible]

1 км, если а) мотоциклисты движутся в одном направлении; б) мотоциклисты движутся в разных направлениях? (рассмотреть все варианты.)

Выберите [illegible] равенство:

A. $(3x$ [illegible] $- 9x$ [illegible];   B. $(x-4)(4-x) = 16 - x^2$;

C. $36a$ [illegible] $- 7)(7 - 6a)$;   D. $y^4 - 25 = (y^2 - 5)(y^2 + 5)$.

В выражении [illegible] x [illegible] $0{,}04$ замените x одночленом так, чтобы получился квадрат двучлена:

A. $0{,}2n$ и $-0{,}2n$;   B. $4n$ или $-4n$;

C. $2n$ или $-2n$;   D. $0{,}4n$ и $-0{,}4n$.

Выберите верное равенство:

A. $(3 - a^2)$ [illegible] $9 - 3a + a^2$;   B. $(k-5)^2 = k^2 - 10k + 10$;

C. $(x + 2y)^2 = x^2 +$ [illegible] $+ 4y^2$;   D. $16a^4 - 24a^2b + 9b^2 = (8a^2 - 3b)^2$.

Разложите на множители выражение $a^4b^6 - 16c^8$:

A. $(a^2b^3$ [illegible];   B. $(a^2b^3 - 4c^4)^2$;

C. $(a^2b^3$ [illegible];   D. $(a^2b^3 - 4c^4)(4c^4 + a^2b^3)$.

Решите уравнение $4x^2 - 25 = 0$:

A. $2{,}5$;   B. $-2{,}5$;

C. $-2{,}5$; $2{,}5$;   D. -10; 10.

Разложите на множители выражение $169 - (z + 7)^2$:

A. $(6 - z)$ [illegible];   B. $(6 - z)(20 - z)$;

C. $(6$ [illegible] $20)$;   D. $(z - 6)(20 - z)$.

Выберите [illegible] равенство:

A. $8t$ [illegible] $2t - 1)$;

B. 2 [illegible] $(36a^2 - 6ab$ [illegible] $b^2)$;

C. $27x^3$ [illegible] $(9x^2 - 12xy + 16y^2)$;

D. $\frac{8}{27}a$ [illegible] $a^2 + \frac{1}{12}ab - \frac{1}{4}b^2$ [illegible].

На [illegible] выражение $41^3 + 14^3$:

A. 2;   B. 7;   C. 14;   D. 55.

В выражении $0{,}25a^2$ [illegible] $ab + 9b^2$ вместо звездочки (*) вставьте число, чтобы получился квадрат разности двучлена:

A. 1,5;   B. [illegible]1,5;   C. 3;   D. [illegible]3.

Вычислите: [illegible]

A. 400;   B. 10;   C. -40;   D. -400.

Решите уравнение $5x^3 - 125x = 0$:

A. 0;5; B. -5; C. 0; D. -5; 0; 5.

Упростите выражение $(8 - x)(8 + x) + (x - 2)^2$:

A. $68 + 4x$; B. $68 - 4x$;

C. $60 - 4x$; D. $60 + 4x$.

Упростите выражение $(9 - b)(9 + b) - (3 + b)(9 - 3b + b^2)$ и найдите его значение при $b = -1$:

A. 52; B. 53; C. 56; D. 108.

В выражении $m^2 - 2* + 0{,}01$ вместо звездочки (*) вставьте одночлен так, чтобы получился квадрат разности двучлена:

A. $0{,}1\,m$ или $-0{,}1\,m$; B. $0{,}2\,m$;

C. $-0{,}2\,m$; D. $0{,}2m$ и $-0{,}2\,m$.

Преобразуйте выражение $(5x - 2)(x + 1) + (5 - 2x)^2$ в многочлен стандартного вида:

A. $x^2 + 23x - 27$; B. $9x^2 + 23x - 27$;

C. $9x^2 - 27x + 27$; D. $x^2 - 23x + 27$.

Разложите выражение $2x + y + y^2 - 4x^2$ на множители:

A. $(2x + y)(y - 2x)$; B. $(2x - y)(1 - y - 2x)$;

C. $(y + 2x)(y - 2x + 1)$; D. $(y + 2x)(2x - y - 1)$.

Упростите выражение $(2 - a)(4 + 2a + a^2) - (3 - a)(9 + 6a + a^2)$ и найдите его значение при $a = -2$:

A. -3; B. 37; C. -57; D. -19.

Вычислите $\frac{18^3 - 7^3}{18^2 + 18 \cdot 7 + 7^2}$:

A. 3218; B. 1321; C. 11; D. 3125.

Разложите на множители выражение $(b - 4)^2 - (a - 3)^2$:

A. $(b - a - 7)(b - a - 1)$; B. $(b + a - 7)(b - a - 1)$;

C. $(b + a + 7)(b - a + 1)$; D. $(b - a + 7)(b + a - 1)$.

Разложите на множители выражение $x^5 - x^3y^2$:

A. $(x - y)(x^2 + y^2)$; B. $x^3(x - y)^2$;

C. $x^3(x^2 + y^2)$; D. $x^3(x - y)(x + y)$.

Что такое алгебраическая дробь?

Вы знаете, что такое *многочлен* (*одночлен, двучлен, трехчлен*). *Например*, выражение: $-2a^2b^3$ — одночлен, $x^2 - 0{,}12y^2$ — двучлен, $\frac{1}{2}x^2 + 2xy + y^2$ — трехчлен, $x^3 - 3x + 7xy + 8y + y^2 + \frac{1}{12}$ — многочлен.

Многочлены являются *целыми выражениями*. Число также многочлен.

В выражениях: $\frac{4}{2a} + \frac{b}{11}$, $\frac{2x}{y^2} - \frac{6}{x+y} - \frac{a}{y}$, $\frac{14}{a^2} + \frac{a^2}{7}$ числитель и знаменатель являются многочленами, или целыми выражениями. Такие выражения называют *алгебраическими* (*рациональными*) *дробями*, или *дробными выражениями*.

Алгебраической (рациональной) дробью (дробным выражением) называется выражение вида $\frac{A}{B}$, где A и B — многочлены (целые выражения).

Многочлен A называется *числителем алгебраической дроби* (*дробного выражения*), многочлен B называется *знаменателем алгебраической дроби* (*дробного выражения*).

Целые и дробные выражения (многочлены и алгебраические дроби) называются *рациональными выражениями*.

целые выражения (многочлены)	дробные выражения (алгебраические дроби)

Вы умеете находить значения целых выражений. [illegible] дробных выражений (алгебраических дробей) [illegible]

Для нахождения значения целого выражения (многочлена) всегда можно выполнить указанные арифметические действия, поэтому целое выражение имеет смысл при любых значениях входящих в него переменных.

Почему нельзя найти значение алгебраической дроби $\frac{[illegible] - 8a}{14ab}$ при $a = 0$ или $b = 0$?

Дробное выражение (алгебраическая дробь) при некоторых значениях переменных может не иметь смысла.

Почему дробное выражение (алгебраическая дробь) [illegible] — не имеет смысла при $x = 0$? При всех остальных значениях x дробное выражение (алгебраическая дробь) имеет смысл.

Значения переменных, при которых дробное выражение (алгебраическая дробь) имеет смысл, называются *допустимыми значениями переменных дробного выражения* (алгебраической дроби).

Как найти область допустимых значений переменных алгебраической дроби?

Пример. Найдем допустимые значения переменной x дробного выражения (алгебраической дроби) $\frac{7 - 2x}{x(x - 2)}$.

Решение. Допустимыми значениями дробного выражения являются такие значения переменных, при которых знаменатель не равен нулю. Поэтому найдем значения переменной x, при которых знаменатель алгебраической дроби обращается в нуль, и исключим эти значения из всех чисел. Для этого сначала решим уравнение $x(x-3)=0$.

Это уравнение имеет два корня: 0 и 3, так как произведение равно нулю тогда и только тогда, когда хотя бы один из множителей равен нулю. Значит, допустимыми значениями переменной x дробного выражения (алгебраической дроби) $\frac{7+8x}{x(x-3)}$ являются все числа, кроме 0 и 3, т. е. числовой промежуток $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: $(-\infty; 0) \cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$.

Алгебраические дроби также называют *дробно-рациональными выражениями*. Например, [illegible] — дробно-рациональные выражения.

Допустимыми значениями дробно-рационального выражения являются значения переменных, при которых знаменатель дроби не обращается в нуль.

Выберите дробно-рациональные выражения из выражений:

1) $\frac{2x}{[illegible]} - \frac{1}{7}$; 2) [illegible]; 3) [illegible];

[illegible]   5) [illegible];   6) [illegible] $\frac{5}{0{,}2y}$ + [illegible] $\frac{8}{x}$;

Найдите значение выражения:

1) [illegible] при x = [illegible]; [illegible]; [illegible]; 100;

2) [illegible] при a = −2; −0,4; 0; 2,5;

3) [illegible] при b = [illegible]; −5; [illegible];

4) [illegible] при x = [illegible]; 0,5; 1; 3;

5) [illegible] при y = [illegible]1,5; 2,5; 4; 4,5;

6) [illegible] при x = $\frac{1}{[illegible]}$; 1,5; 2; 3;

7) $\frac{(a+b)^{[illegible]} - 1}{a^{[illegible]} - 1}$ при a = −3, b = [illegible]1;

8) [illegible] при $a = 1\frac{1}{2}$, b = 0,5.

Заполните таблицу 37.1.

Таблица 37.1

x	15	3	−0,2	0	$\frac{1}{17}$	1	$5\frac{2}{3}$	7
$\frac{x-[illegible]}{y-[illegible]}$								

Укажите значения переменной, при которых не имеет смысла выражение:

1) [illegible];   2) [illegible];   3) $\frac{y^2 [illegible]}{y}$ + $\frac{y}{y-3}$;

4) [illegible];   5) [illegible] $\frac{2a}{[illegible] - 3}$;   6) [illegible] $\frac{1}{3c}$ + $\frac{4c}{2c-8}$.

Составьте дробь, у которой числитель: 1) произведение переменных x и y, знаменатель — сумма $2x$ и $3y$;
2) разность выражений [illegible] и [illegible], знаменатель — их произведение;

Найдите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\frac{5y}{11} - \frac{8}{[illegible]}$; 2) $\frac{y^2}{y^2} - \frac{1}{3y}$; 3) $\frac{y}{y^2} - \frac{10}{[illegible] - 3}$;

4) $\frac{6y}{3y-4} - \frac{15}{y+16}$; 5) $\frac{32}{5y} - \frac{3y-1}{2y-7}$.

Укажите допустимые значения переменной в выражении:

1) $\frac{4}{x} - \frac{1}{2x-6}$; 2) $\frac{2x-9}{x(x-1)} - \frac{1}{3x}$;

3) $5x - \frac{71}{x-5}$; 4) $\frac{3y-7}{(y-3)(3y-5)} - \frac{5}{y}$.

Запишите дробь с переменной x, которая имеет смысл при всех значениях x, кроме чисел 1) 3; 2) 1; 3) −2; 4) −1 и 2; 5) 3 и 5; 6) $-\frac{2}{3}$ и 7.

Из городов A и B, расстояние между которыми по железной дороге s км, вышли в одно и то же время навстречу друг другу два поезда. Первый шел со скоростью v_1 км/ч, а второй со скоростью v_2 км/ч. Через t ч они встретились. Выразите переменную t через s, v_1 и v_2. Найдите значение t, если известно, что: 1) $s = 350$, $v_1 = 55$, $v_2 = 45$; 2) $s = 465$, $v_1 = 85$, $v_2 = 70$.

1) Найдите значение дроби $\frac{3x}{x^2 - 3x^3}$, если оно существует при: $x = 0$; $x = -0{,}5$; $x = 2$; $x = 4{,}6$; $x = 3$.

2) Вычислите значение дроби $\frac{2c}{3c^2} - \frac{1}{3c^2}$, если оно существует при: $c = -2$, $c = 1{,}5$; $c = 6\frac{1}{4}$; $c = \frac{2}{9}$; $c = 1{,}2$.

Поменяв в тождестве $\frac{a}{b}=\frac{ac}{bc}$ его левую и правую части, получим: $\frac{ac}{bc}=\frac{a}{b}$.

Это тождество позволяет заменить дробь вида $\frac{ac}{bc}$ тождественно равной дробью $\frac{a}{b}$ или сократить дробь $\frac{ac}{bc}$ на общий множитель c числителя и знаменателя.

Пример 1. Сократим дробь $\frac{35a^3}{21ab}$.

Решение. Представим числитель и знаменатель данной дроби в виде произведений, содержащих один и тот же множитель $7a$: $\frac{35a^3}{21ab}=\frac{5a^2\cdot 7a}{3b\cdot 7a}$.

Затем сократим дробь на общий множитель $7a$. Тогда получим $\frac{5a^2\cdot 7a}{3b\cdot 7a}=\frac{5a^2}{3b}$.

Ответ: $\frac{5a^2}{3b}$.

Оформить решение можно и по-другому, сопровождая запись выполненных действий записью пояснений, как в примерах 2, 3, 4.

Пример 2. Сократим дробь $\frac{16-x^2}{8x-2x^2}$.

Решение.

$\frac{16-x^2}{8x-2x^2}=\frac{(4-x)(4+x)}{2x(4-x)}$ — разложим числитель и знаменатель дроби на множители;

$\frac{(4-x)(4+x)}{2x(4-x)}=\frac{4+x}{2x}$ — сократим полученную дробь на общий множитель $4-x$.

Ответ: $\frac{4+x}{2x}$.

Пример 3. Приведём дробь $\frac{5x}{6y}$ к дроби со знаменателем $12y^3$.

Решение.

$12y^3=6y\cdot 2y^2$ — представим знаменатель, к которому надо привести дробь, в виде произведения, в котором знаменатель данной дроби является одним из множителей;

$\frac{5x}{6y} = \frac{5x \cdot 2y^2}{6y \cdot 2y^2}$ — умножили числитель и знаменатель данной дроби $\frac{5x}{6y}$ на второй (дополнительный) множитель $2y^2$;

$\frac{5x \cdot 2y^2}{6y \cdot 2y^2} = \frac{10xy^2}{12y^3}$ — упростили числитель и знаменатель.

Ответ: $\frac{10xy^2}{12y^3}$.

Пример 4. Приведем дробь $\frac{2x}{9y-7}$ к дроби со знаменателем $7-9y$.

Решение.

$\frac{2x}{9y-7} = \frac{2x \cdot (-1)}{(9y-7) \cdot (-1)}$ — числитель и знаменатель данной дроби умножили на -1;

$\frac{2x \cdot (-1)}{(9y-7) \cdot (-1)} = \frac{-2x}{-9y+7}$ — упростили числитель и знаменатель;

$\frac{-2x}{-9y+7} = \frac{-2x}{7-9y}$ — в знаменателе использовали переместительное свойство сложения;

$\frac{-2x}{7-9y} = -\frac{2x}{7-9y}$ — по свойству $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$.

Ответ: $-\frac{2x}{7-9y}$.

Сократите алгебраические дроби:

1) [illegible]; 2) $\frac{12c^{[illegible]}}{[illegible]}$; 3) $\frac{12xy^3}{8x^2y}$; 4) $\frac{6a^4x}{12a^{[illegible]}}$;

5) [illegible]; 6) [illegible]; 7) $\frac{48a^2c^2}{36ac}$; 8) $\frac{63x^5y}{84x^6y}$.

1) [illegible]; 2) $\frac{25a^{[illegible]}b}{15ab}$; 3) $\frac{24a^2}{6a}$; 4) $\frac{27x^{[illegible]}y}{21xy^{[illegible]}}$.

5) [illegible]; 6) [illegible]; 7) $\frac{12m^{[illegible]}n^{[illegible]}}{35mn^{[illegible]}}$; 8) $\frac{75p^4q}{150p^{[illegible]}}$.

Приведите к дроби со знаменателем $4a^2c^4$ дробь:

1) [illegible]; 2) [illegible]; 3) $\frac{4a}{3ac^{[illegible]}}$;

4) [illegible]; 5) [illegible]; 6) $\frac{ac}{a^2c}$.

Приведите алгебраическую дробь:

1) [illegible] к дроби со знаменателем $(a-b)$;

2) [illegible] к дроби со знаменателем x^2-ax;

3) [illegible] к дроби со знаменателем y^2-1;

4) [illegible] к дроби со знаменателем a^3-b^3;

5) [illegible] к дроби со знаменателем $b-y$;

6) [illegible] к дроби со знаменателем $10-x$;

7) [illegible] к дроби со знаменателем $4-p^2$;

8) [illegible] к дроби со знаменателем $2a^2$ [illegible];

9) [illegible] к дроби со знаменателем $15x^2y$;

10) [illegible] к дроби со знаменателем x^2-1.

[illegible]

1) [illegible] 2) [illegible] 3) [illegible] 4) [illegible]

5) [illegible] 6) [illegible] 7) [illegible] 8) [illegible]

[illegible]

1) [illegible]

2) [illegible]

[illegible]

1) [illegible] 2) [illegible] 3) [illegible] 4) [illegible]

5) [illegible] 6) [illegible] 7) [illegible] 8) [illegible]

[illegible]

1) [illegible] 2) [illegible] 3) [illegible]

4) [illegible] 5) [illegible] 6) [illegible]

7) [illegible] 8) [illegible] 9) [illegible]

10) [illegible]

[illegible]

Читают: [illegible]

[illegible]

Правило вычитания рациональных дробей с одинаковыми знаменателями:

чтобы выполнить вычитание дробей [illegible]

[illegible]

Пример 1. Сложите дроби [illegible]

Решение.

[illegible]

1) $\frac{b}{(a-b)^2} - \frac{a+b}{b^2-ab}$;

2) $\frac{a}{a-6} - \frac{3}{a+6} + \frac{a^2}{36-a^2}$;

3) $\frac{1}{a-4b} - \frac{1}{a+4b} - \frac{2a}{16b^2-a^2}$;

4) $\frac{x^2}{(x-y)^2} - \frac{x+y}{2x-2y}$;

5) $\frac{4}{y+2} - \frac{3}{y-2} + \frac{12}{y^2-4}$;

6) $\frac{1}{2b-2a} + \frac{1}{2b+2a} + \frac{a^2}{a^2b-b^2}$;

7) $\frac{1}{2x-b} + \frac{6bx}{b^3-8x^3}$;

8) $\frac{2y^2+16}{y^3+8} - \frac{2}{y+2}$;

9) $\frac{1}{2a-2c} + \frac{1}{2a-2c} + \frac{2a^2}{a^2c-c^3}$.

Докажите, что тождественно равны выражения:

1) $\frac{n^3}{n^2-4} - \frac{n}{n-2} - \frac{2}{n+2}$ и $n-1$;

2) $\frac{3}{a^2-3a} + \frac{a^2}{a-3}$ и $a+3+\frac{9a+3}{a^2-3a}$;

3) $\frac{2a+b}{2a^2-ab} - \frac{16a}{4a^2-b^2} - \frac{2a-b}{2a^2+ab}$ и $\frac{-8}{2a+b}$;

4) $\frac{1}{(a-3)^2} - \frac{2}{a^2-9} + \frac{1}{(a+3)^2}$ и $\frac{36}{(a^2-9)^2}$;

5) $\frac{x-2}{x^2+2x+4} - \frac{6x}{x^3-8} + \frac{1}{x-2}$ и $\frac{2x-4}{x^2+2x+4}$;

6) $\frac{2a^2+7a+3}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} - \frac{3}{a-1}$ и $-\frac{1}{a-1}$.

[illegible] — сократили рациональную дробь.

Ответ: 1.

Пример 4. Умножим рациональную дробь $\frac{3b+2a}{9b^2-4a^2}$ на многочлен $4a^2-12ab+9b^2$.

Решение.

$\frac{3b+2a}{9b^2-4a^2}\cdot(4a^2-12ab+9b^2)=$ — записали многочлен в виде дроби;

$=\frac{3b+2a}{9b^2-4a^2}\cdot\frac{4a^2-12ab+9b^2}{1}=$

$=\frac{(3b+2a)(4a^2-12ab+9b^2)}{9b^2-4a^2}=$ — применили правило умножения дробей;

$=\frac{(3b+2a)(4a^2-12ab+9b^2)}{9b^2-4a^2}=$ — разложили на множители выражения $4a^2-12ab+9b^2$ и $9b^2-4a^2$, используя формулы сокращенного умножения;

$=\frac{(3b+2a)(2a-3b)^2}{(3b-2a)(3b+2a)}=$

$=\frac{(3b+2a)(3b-2a)^2}{(3b-2a)(3b+2a)}=$ — сократили дробь, учитывая, что $(2a-3b)^2=(3b-2a)^2$.

$=3b-2a$.

Ответ: $3b-2a$.

[illegible], что при возведении дроби в степень возводят в эту степень числитель и знаменатель, и первый результат записывается в [illegible] знаменателе дроби: $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$.

[illegible] возводят в степень любые рациональные дроби.

Свойство 3.

Равенство $\left(\frac{a}{b}\right)^n=\frac{a^n}{b^n}$, где n — целое число, верно при любых допустимых значениях переменных, т.е. при $b\neq0$.

[illegible]

Правило возведения рациональной дроби в степень:

Чтобы возвести рациональную дробь в степень, надо возвести в эту степень числитель и знаменатель и первый результат записать в числителе, а второй — в знаменателе дроби.

Пример 5. Возведём рациональную дробь [illegible] в квадрат.

Решение.

[illegible] — используем правило возведения рациональной дроби в степень;

[illegible] — возведём в степень числитель дроби и её знаменатель.

Ответ: $\frac{25m^{[illegible]}}{36n^{1[illegible]}}$

Рассмотрим деление рациональных дробей.

Вы знаете, что при делении обыкновенных дробей первую дробь (делимое) умножают на дробь, обратную второй (делителю).

Например, [illegible]

Таким же образом поступают при делении рациональных дробей.

Свойство 3

Равенство [illegible] верно при любых допустимых значениях переменных [illegible] при $b \neq 0$, [illegible]

[illegible]

Правило деления рациональных дробей:

Чтобы разделить одну дробь на другую, нужно первую дробь умножить на дробь, обратную второй.

Воспользовавшись равенством $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}$ и правилом умножения рациональных дробей, получим: $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$.

Следовательно, $\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc}$.

Пример 6. Упростим дробно-рациональное выражение:

$$\left(\frac{3+b}{2b^2-6b}\right)^3:\left(\frac{b^2+6b+9}{2b\cdot\left(b^2-6b+9\right)}\right)^2.$$

Решение.

$$\left(\frac{3+b}{2b^2-6b}\right)^3:\left(\frac{b^2+6b+9}{2b\cdot\left(b^2-6b+9\right)}\right)^2=$$ — применили правило возведения дроби в степень;

$$=\frac{(3+b)^3}{\left(2b^2-6b\right)^3}:\frac{\left(b^2+6b+9\right)^2}{4b^2\cdot\left(b^2-6b+9\right)^2}$$

$$\frac{(3+b)^3}{\left(2b^2-6b\right)^3}:\frac{\left(b^2+6b+9\right)^2}{4b^2\cdot\left(b^2-6b+9\right)^2}=$$ — применили правило деления рациональных дробей;

$$=\frac{(3+b)^3\cdot 4b^2\cdot\left(b^2-6b+9\right)^2}{\left(2b^2-6b\right)^3\cdot\left(b^2+6b+9\right)^2}$$

$$\frac{(3+b)^3\cdot 4b^2\cdot\left(b^2-6b+9\right)^2}{\left(2b^2-6b\right)^3\cdot\left(b^2+6b+9\right)^2}=$$ — разложили выражения b^2-6b+9, b^2+6b+9, $2b^2-6b$ на множители, используя формулы сокращенного умножения и вынесение общего множителя за скобки;

$$=\frac{(3+b)^3\cdot 4b^2\cdot\left((b-3)^2\right)^2}{(2b(b-3))^3\cdot\left((b+3)^2\right)^2}$$

$$\frac{(3+b)^3\cdot 4b^2\cdot\left((b-3)^2\right)^2}{(2b(b-3b))^3\cdot\left((b+3)^2\right)^2}=\frac{(3+b)^3\cdot 4b^2\cdot(b-3)^4}{8b^3(b-3b)^3\cdot(b+3)^4}.$$ — возвели в степень произведение и степень;

$\frac{(3}{8a^2b}\cdot\frac{[illegible]}{[illegible]}\cdot\frac{16^2}{3b}\cdot\frac{[illegible]}{(b-3)^2}\cdot\frac{3}{[illegible]} = \frac{b-3}{2a(b-3)}$ — сократили дробь.

Ответ: $\frac{b-3}{2a(b-3)}$.

Представьте дробь в виде произведения или частного двух дробно-рациональных выражений:

1) $\frac{8xy\ [illegible]\ 2y}{5z}$; 2) $\frac{4x^2y\ [illegible]\ 2y^2}{3xy}$; 3) $\frac{3xy^2\ [illegible]\ 12x}{5x\ [illegible]}$; 4) $\frac{7xy}{5a}\ [illegible]\ \frac{25x^2}{[illegible]}$.

Выполните умножение:

1) $\frac{b}{2a}\cdot\frac{5a}{3}$; 2) $\frac{5a}{8y}\cdot\frac{7}{10}$; 3) $\frac{c^2}{16}\cdot\frac{a}{b}$;

4) $\frac{12x^2}{25}\cdot\frac{15}{8x}$; 5) $\frac{5}{3a}\cdot\frac{2b}{5}$; 6) $\frac{3x}{4}\cdot\frac{1}{x}$;

7) $\frac{3c}{10}\cdot\frac{15}{c}$; 8) $\frac{16y^2}{5x}\cdot\frac{5}{8y}$; 9) $\frac{5a}{8y}\cdot\frac{7}{10}$;

10) $\frac{b}{2a}\cdot\frac{5a}{3}$; 11) $\frac{18}{x^3}\cdot\frac{x}{21}$; 12) $\frac{3}{4a^2}\cdot\frac{16a}{9}$;

13) $\frac{15a}{4}\cdot\frac{12}{5x}$; 14) $\frac{15}{8a}\cdot\frac{12b}{5}$; 15) $\frac{18}{x}\cdot\frac{x}{3y}$.

Выполните деление:

1) $35x^2y : \frac{7x^2}{81}$; 2) $\frac{12p}{7a} : \frac{6p}{35a^2}$; 3) $\frac{[illegible]}{[illegible]} : \frac{[illegible]}{16x^2}$;

4) $\frac{x^2}{12b} : \frac{ab}{36}$; 5) $\frac{9x}{20y} : \frac{x^2}{16x}$; 6) $\frac{18[illegible]}{[illegible]} : \frac{9[illegible]}{[illegible]}$;

7) $\frac{8c}{21a^2} : \frac{6c^2}{7d}$; 8) $\frac{11b}{4y^2} : 22x^2$; 9) $\frac{15c^3}{7d} : 9c^2d^3$;

10) $\frac{4}{9x^2} : \frac{7x}{2y^2}$; 11) $\frac{3x}{16a^2} : \frac{1}{5a^2}$; 12) $27a^2 : \frac{18a^2}{7b^2}$.

Выполните действия

1) $\frac{2a^2b}{3xy} \cdot \frac{3x^2y}{4ab^2} \cdot \frac{6ax}{15b^2}$; 2) $\frac{x^2}{4y} \cdot \frac{xy - y^2}{x} \cdot \frac{2x^2}{x-y}$;

3) $\frac{6m^2n^2}{35p^2} \cdot \frac{49n^3}{m^3p^3} \cdot \frac{5m^3p^2}{42n^3}$; 4) $\frac{m-n}{mn} \cdot \frac{2mn}{mn-m^2}$;

5) $\frac{ma-mb}{3n^2} \cdot \frac{2n}{nb-na}$; 6) $\frac{3a}{b^2} \cdot \frac{ab+b^2}{9} \cdot \frac{b}{a}$;

7) $\frac{4ab}{cx+dx} \cdot \frac{ax-bx}{2ab}$; 8) $\frac{ax-ay}{5x^2y^2} \cdot \frac{[illegible]}{4y-ax}$;

9) $\frac{cx-cy}{35x^2y^2} \cdot \left(-\frac{15xy}{ny-nx}\right)$.

1) $(x-3y):(x^2-9y^2)$; 2) $\frac{ab^2}{a^2-1} : \frac{5b}{a-a^2}$;

3) $(a^2-6ab+9b^2):(a^2-9b^2)$; 4) $\frac{x^2-4y^2}{xy} : \frac{x^2-2xy}{3y}$;

5) $\frac{a^2-3a}{a^2-25} : \frac{a^2-9}{a^2+5a}$; 6) $\frac{3m^2-3n^2}{m^2+mp} : \frac{3n-6p}{p+m}$.

Найдите значение выражения:

1) $\frac{3m-n}{4m-n} \cdot \frac{16m^2-n^2}{3n-1}$, если $m=\frac{1}{4}$, $n=-5$;

2) $\frac{x^2-2x}{2y+8} \cdot \frac{2y+8}{x^2-4}$, если $x=0,5$; $y=-1,5$.

Упростите выражение:

1) $\frac{12x^3}{a^3n^3} : \frac{x^2}{4mn^2}$; 2) $\frac{a^2b^2}{12mn^2} : \left(-\frac{4ab^3}{9mn}\right)$;

3) $\frac{16mx^2}{3a^2} : (-4m^2x)$; 4) $\frac{35a^2y}{12xb} : \frac{7xy}{8ab^2}$;

5) $-\frac{6xy^2}{5ab} : \left(-\frac{9x^2y^2}{10ab}\right)$; 6) $45a^2bx \cdot \frac{b^2}{30x^2a^3}$.

Выполните действия:

1) $\frac{(y-5)^2}{2y-12}\cdot\frac{y^2-36}{2y-10}$; 2) $\frac{(x-3)^2}{2x-4}\cdot\frac{x^2-4}{3x-9}$;

3) $\frac{c^2-2bc}{b-3}\cdot\frac{5b-15}{4c^2}$; 4) $\frac{a^2-1}{a-b}\cdot\frac{7a-7b}{a^2+a}$.

Представьте в виде дроби выражение:

1) $\left(\frac{a^5}{c^2}\right)^4$; 2) $\left(\frac{2a^4}{3b^3}\right)^3$; 3) $\left(-\frac{3x^2y^3}{4m^4}\right)^2$;

4) $\left(\frac{10m^2}{3a^3p}\right)^3$; 5) $\left(-\frac{5a^3}{3c^2d^3}\right)^3$; 6) $\left(-\frac{b^4c}{8a^5}\right)^2$.

Докажите, что не зависит от допустимых значений переменной значение выражения:

1) $\frac{a^2-1}{a-b}\cdot\frac{7a-7b}{a^2+a}:\frac{a+1}{a}$; 2) $\frac{(x-3)^2}{2x-4}\cdot\frac{x^2-4}{3x-9}-\frac{2}{(x+3)(x-2)}$;

3) $\frac{(y-5)^2}{2y-12}\cdot\frac{y^2-36}{2y-10}-\frac{y}{2}\cdot\frac{2}{(5-y)(y-6)}$; 4) $\frac{c^2-2nc}{n-3}\cdot\frac{5n-15}{n^2}\cdot\frac{15}{4c^2}-\frac{n-2c}{n}$.

Выполните действия:

1) $\left(\frac{mx^2}{2m+8}-\frac{my^2}{2m+8}\right)\cdot\left(\frac{3m+12}{my}-\frac{12}{mx}\right):(x-y)$; 2) $\left(\frac{a^2}{a^2-1}-\frac{1}{a^2-1}\right)\cdot\frac{a^2-a-1}{a^2-2a+1}\cdot(a+1)$;

3) $\frac{ax-ay}{x^2-2xy+y^2}\cdot\frac{x^2-xy}{7x-7y}:ax$; 4) $\left(\frac{b^3}{b^2}-\frac{8}{9}\right)\cdot\frac{b+3}{b^2+2b+4}$;

5) $\left(\frac{x^3-y^3}{x-y}\cdot\frac{x}{x^2+xy+y^2}\right):(x-y)$; 6) $\left(\frac{c^2}{c^3-27}\cdot\frac{6c+9}{c}-\frac{c^2-3c+9}{3c-9}\right):(c-3)$.

Упростите выражение:

1) $\frac{a^2-10a+25}{3a-15}\cdot\frac{a^2-16}{2a+10}$; 2) $\frac{y^2-25}{y^2+12y+36}:\frac{3y+18}{2y-10}$;

3) $\frac{4-a^2}{4a-8b}\cdot\frac{a^2-4ab+4b^2}{2-2a}$; 4) $\frac{a^3-8}{15a^2+27a}\cdot\frac{2a+3}{a^2+2a+4}$.

Найдите значение выражения:

1) $\frac{2x^2-8x}{x+3} : (2x-2)\cdot x$, если $x = 2{,}5;\ -3{,}4$;

2) $(3a-6b) : \frac{2a^2-8b^2}{a-2b}$, если $a = 2{,}6$, $b = -1{,}2$.

Докажите, что при любых допустимых значениях переменных целым числом является значение выражения:

1) $\frac{a^2+4a+4}{16-b^4} : \frac{4-a^2}{4+b^2} \cdot \frac{(2-a)\cdot(4-b^2)}{a+2}$;

2) $\frac{4m^2-25n^2}{m^3+8} : \frac{2m+5n}{m^2-2m+4} \cdot \frac{m+2}{2m-5n}$.

Упростите выражение:

1) $\frac{a-3}{2a+4} \cdot \frac{a^2-4}{a^3-27} \cdot \frac{a^2+3a+9}{a^2-2a}$; 2) $\frac{ab-2b}{a^2-8a+16} \cdot \frac{a^2-16}{2a-a^2} : \frac{a+4}{4b}$.

Докажите тождество:

1) $\frac{a^2+ax+x^2}{x-1} : \frac{a^3-x^3}{x^2-1} = \frac{x+1}{a-x}$; 2) $\frac{ap^2-9a}{p^3-8} : \frac{p-3}{2p-4} = \frac{2a(p+3)}{p^2+2p+4}$.

Докажите, что значение выражения:

1) $\frac{c^2-1}{c^3+1} : \frac{c-1}{c^2-c+1}$ при ($c \neq 1$ и $c \neq -1$) не зависит от значения переменной c;

2) $\frac{a^2-4}{a^3+8} \cdot \frac{a^2-2a+4}{3a-6}$ при ($a \neq 2$ и $a \neq -2$) не зависит от значения переменной a.

Пример 1. Преобразуем в рациональную дробь выражение:

$$a+4-\frac{6a+3}{4a^2+4a+1}\cdot\frac{4a^2-1}{3a}.$$

Решение.

1) $\frac{6a+3}{4a^2+4a+1}\cdot\frac{4a^2-1}{3a}=\frac{3(2a+1)(2a-1)(2a+1)}{3a(2a+1)^2}=\frac{2a-1}{a}$ — выполнили умножение дробей;

2) $a+4-\frac{2a-1}{a}=\frac{a(a+4)-(2a-1)}{a}=\frac{a^2+4a-2a+1}{a}=$

$=\frac{a^2+2a+1}{a}=\frac{(a+1)^2}{a}$ — выполнили вычитание из многочлена $a+4$.

Ответ: $\frac{(a+1)^2}{a}$.

Вы знаете, что тождество можно доказывать разными способами:

– преобразовывать его левую часть до тех пор, пока не получится его правая часть;

– преобразовывать его правую часть до тех пор, пока не получится его левая часть;

– преобразовывать его обе части до тех пор, пока не получатся одинаковые выражения;

– преобразовать разность его левой и правой части и получить нуль.

Пример 2. Докажем тождество:

$$\left(\frac{m}{n^2-mn}+\frac{n}{mn-m^2}\right)\cdot\frac{n^2m-nm^2}{n^2-m^2}+\frac{2n}{n-m}=1.$$

Решение.

$\left(\frac{m}{n^2-mn}+\frac{n}{mn-m^2}\right)\cdot\frac{n^2m-nm^2}{n^2-m^2}=\left(\frac{m}{n(n-m)}-\frac{n}{m(n-m)}\right)\cdot$

$\cdot\frac{nm(n-m)}{n^2-m^2}=\frac{m^2-n^2}{nm(n-m)}\cdot\frac{nm(n-m)}{n^2-m^2}=\frac{(m^2-n^2)\cdot nm(n-m)}{nm\cdot(n-m)\cdot(n^2-m^2)}=$

$=\frac{n-m}{n-m}$ — преобразовали левую часть тождества;

$\frac{2n}{n-m} - 1 = \frac{2n - n + m}{n-m} = \frac{n+m}{n-m}$ — преобразовали правую часть тождества;

$\frac{n+m}{n-m} = \frac{n+m}{n-m}$ — получили одинаковые выражения $\frac{n+m}{n-m}$.

Выполните действия:

1) $\left(\frac{2a}{y} - \frac{2}{a}\right) : \left(\frac{1}{y} - \frac{1}{a}\right)$;

2) $\left(\frac{n}{m} - \frac{n^2}{m^2}\right) : \left(\frac{m^2}{3n^2} - \frac{m}{3n}\right)$;

3) $\frac{ab + b^2}{5} : \frac{b^2}{5a} - \frac{a+b}{b}$;

4) $\frac{x-y}{x} \cdot \frac{5x}{y^2} \cdot \frac{x^2 - xy}{5y}$;

5) $\left(\frac{x}{x-1} - 1\right) \cdot \frac{1-x}{2x-1}$;

6) $\left(\frac{4a}{2-a} - a\right) : \frac{a+2}{a-2}$;

7) $\frac{5y^2}{1-y^2} : \left(1 - \frac{1}{1-y}\right)$;

8) $\frac{xb + b^2}{7} : \frac{b^2}{7x} - \frac{x+b}{b}$;

9) $\frac{x-4}{x-5} \cdot \left(x + \frac{x}{4-x}\right)$;

10) $\left(\frac{a-b}{2a+2b}\right) : \left(\frac{2}{a} - \frac{2}{b}\right) \cdot \left(\frac{4a - 4b}{a^2 b}\right)$.

1) $\left(\frac{2m+1}{2m-1} - \frac{2m-1}{2m+1}\right) : \frac{4m}{10m-5}$;

2) $\frac{y+3}{y^2-9} \cdot \left(\frac{y+3}{y-3} - \frac{y-3}{y+3}\right)$.

Упростите выражения:

1) $\frac{n^2 - 9}{2n^2 + 1} \cdot \left(\frac{6n+1}{n-3} + \frac{6n-1}{n+3}\right)$;

2) $\left(\frac{6x+y}{x-6y} + \frac{6x-y}{x+6y}\right) : \frac{x^2+y^2}{x^2-36y^2}$.

1) $\left(\frac{x}{xy - y^2} - \frac{y}{x^2 - xy}\right) : \frac{x^2 - y^2}{5xy}$;

2) $\left(\frac{4p - 8}{p^3 - 2p^2} - \frac{q + 2}{q^3 + 2q^2}\right) \cdot \frac{p}{2q - p}$;

3) $\left(\frac{a}{b^2 - ab} + \frac{b}{a^2 - ab}\right) \cdot \frac{3ab}{b - a}$;

4) $\left(\frac{a - 7b}{ab - b^2} + \frac{7a + b}{a^2 - ab}\right) : \frac{a^2 + b^2}{a - b}$.

Найдите значения выражений

1. $\frac{a^2 - 25}{a + 3} \cdot \frac{1}{a^2 + 5a} - \frac{a + 5}{a^2 - 3a}$ при 1) $a = 2$; 2) $a = -4$;

2. $\frac{1 - 2x}{2x + 1} + \frac{x^2 + 3x}{4x^2 - 1} : \frac{3 + x}{4x + 2}$ при 1) $x = -1$; 2) $x = -2{,}5$.

1) $\frac{n - c}{a + n} - \frac{an - n^2}{a^2 - ac} \cdot \frac{a^2 - c^2}{a^2 - n^2} + 11{,}5\,n$ при $a = 2$; $n = -1$; $c = 3$;

2) $\frac{n^2 - 4}{x^2 - 9} : \frac{n^2 - 2n}{xy + 3y} + \frac{2 - y}{x - 3}$ при $n = 3$; $x = -4$; $y = -5$.

Выполните действия:

1) $\left(2a + 1 - \frac{1}{1 - 2a}\right) : \left(2a - \frac{4a^2}{2a - 1}\right)$;

2) $(y + 1)^2 \cdot \left(\frac{1}{y + 1} + \frac{1}{y^2 - 1} - \frac{1}{y - 1}\right)$;

3) $1 - \left(\frac{2}{c - 2} - \frac{2}{c + 2}\right) \cdot \left(c - \frac{3c + 2}{4}\right)$;

4) $1 + \left(1 - \frac{9x^2 + 4}{12x}\right) : \left(\frac{1}{3x} - \frac{1}{2}\right)$.

Найдите x из пропорции:

1) $(a^2 - 4) : (2a - 4) = x : (a + 2)$;

2) $(a^2 - 1)^2 : x = (a^2 - 1) : (a^3 + 1)$.

Докажите тождество:

1) $\frac{x^2}{x^2-4} - \frac{x}{x+2} : x = \frac{x}{x-2}$;

2) $\frac{5a^2-10}{a^3+2a^2-a-2} - \frac{4a}{2} \cdot \frac{6}{(a-1)^2} = \frac{1}{(a-1)^2}$.

Решите уравнение:

1) $(c^2-9)\cdot x = 2c-6$;

2) $\frac{x}{(c-2)^2} = \frac{3}{c^2-4}$;

3) $\frac{4x}{(c+1)^2} = \frac{3c}{c^2-1}$;

4) $\frac{x-3}{(c-4)^2} = \frac{2c}{16-c^2}$.

Представьте в виде алгебраической дроби выражение:

1) $\frac{3x^2}{5y^2} : \frac{9x^3}{2y^2} \cdot \frac{5y}{3(x-1)}$;

2) $\frac{5a(b-1)}{3^2 d} : \frac{5ca^2}{9ab} : \frac{a^2(b-1)}{c^2 d}$;

3) $\frac{7p^3}{10q^3} \cdot \frac{5q^2(p-1)}{11p^2} : \frac{3p}{4q^3}$;

4) $\frac{8x^2y^2}{7ab^2} : \frac{4xy^2}{7a^2b} : \frac{2x^2(y+2)}{ab}$.

Если $x = \frac{3n}{n-2}$, то найдите значение выражения:

1) $\frac{x-3}{2x-n}$;

2) $\frac{2x-4n}{x-2n} - \frac{1}{x}$;

3) $\frac{3x-3}{(2-n)x+n} - \frac{x-3}{2x-3n}$.

Сравните значения выражений $\left(a - \frac{4ab}{a+b} + b\right) : (a-b)$ и $\frac{a}{a+b} - \frac{b}{b-a} + \frac{2ab}{a^2-b^2}$ при $a=3,\ b=-4$.

Докажите, что верно равенство:

1) $\frac{a^2-25}{a+3} \cdot \frac{1}{a^2+5a} - \frac{a+5}{a^2-3a} = \frac{16}{9-a^2}$;

2) $\left(\frac{b}{a} - \frac{c}{b}\right) : \frac{ab-b^2}{a^2-ac} \cdot \frac{a^2-c^2}{a^2-b^2} = \frac{c}{a}$.

Убедитесь, что значение выражения не зависит от допустимых значений переменной:

1) $\frac{(x-2)^2}{3x^3}\cdot\frac{4x^2}{x-2}\cdot\frac{-x}{2-x}$;

2) $\frac{(3x+2)^2}{x-3}:\frac{(3x+2)}{(x-3)^2}\cdot\frac{5}{(x-3)(3x+2)^2}$.

Докажите тождество:

1) $\frac{2x-q}{xq}-\frac{1}{x+q}\cdot\left(\frac{x}{q}-\frac{q}{x}\right)=\frac{1}{q}$; 2) $\frac{1{,}2a^2-ac}{0{,}36a^2-0{,}25c^2}=\frac{20a}{6a+5c}$.

Выполните действия:

1) $(a^2-1)\cdot\left(\frac{1}{a-1}-\frac{1}{a+1}+1\right)$; 2) $\left(\frac{1}{y}-\frac{2}{x-y}\right)\cdot\left(x-\frac{x^2+y^2}{x-y}\right)$;

3) $\left(x+1-\frac{1}{1-x}\right):\left(x-\frac{x^2}{x-1}\right)$; 4) $\left(a+b-\frac{2ab}{a-b}\right):\left(\frac{a+b}{a-b}+\frac{b}{a}\right)$.

1) $\left(\frac{a-1}{3a+(a-1)^2}-\frac{1-3a+a^2}{a^3-1}-\frac{1}{a-1}\right):\frac{a^2+1}{1-a}$;

2) $\left(\frac{1}{n+1}-\frac{3}{n^3+1}+\frac{3}{n^2-n+1}\right)\cdot\left(n-\frac{2n-1}{n-1}\right)$.

Упростите выражение:

1) $\left(\frac{a^2}{a+n}-\frac{a^3}{a^2+n^2+2an}\right):\left(\frac{a}{a+n}-\frac{a^2}{a^2-n^2}\right)$;

2) $\frac{4xy}{y^2-x^2}:\left(\frac{1}{y^2-x^2}+\frac{1}{x^2+2xy+y^2}\right)$;

3) $\left(\frac{2a}{2a+b}-\frac{4a^2}{4a^2+4ab+b^2}\right):\left(\frac{2a}{4a^2-b^2}+\frac{1}{b-2a}\right)$;

4) $\left(\frac{x-2y}{x^2+2xy}-\frac{1}{x^2-4y^2}:\frac{x+2y}{(2y-x)^2}\right)\cdot\frac{(x+2y)^2}{4y^2}$;

5) $\frac{4{,}5a+4x}{0{,}81a^2-0{,}64x2}-\frac{50}{9a-8x}+\frac{1}{ax}$.

Вычислите значение выражения:

1) [illegible] при $x =$ [illegible];

2) [illegible] при $y =$ [illegible]

Найдите [illegible] и b в тождестве:

1) [illegible]

2) [illegible]

3) [illegible]

4) [illegible]

Если a [illegible] c [illegible] и $ac = 2$, то найдите значение выражения

[illegible]

Решите уравнение:

1) [illegible] $x =$ [illegible];

2) [illegible] $2x$

Докажите, что при всех допустимых значениях переменных от a и c не зависит значение выражения:

1) [illegible];

2) $3a$ [illegible].

Докажите, что при всех допустимых значениях переменных значение выражения:

1) $\left(\frac{2xb}{x^2-b^2}+\frac{x}{2x}-\frac{b}{2b}\right)\cdot\frac{2x}{x+b}$ [illegible] $\frac{\cdot}{b}$ [illegible] x;

2) $\frac{y}{y+x}$ [illegible] $\frac{x^2-xy^2}{x^2-y^2}\cdot\frac{x}{(x+y)^2}$ [illegible] $\frac{y}{y}$ неотрицательно и не

зависит от значения переменных.

Упростите выражения:

1) $\dfrac{3-\frac{2}{x}}{3-\frac{2}{x}}$;

2) $\dfrac{\frac{5a}{b}-\frac{b}{b}-1}{\frac{15a-a}{b}-1}$;

3) $\dfrac{\frac{2x}{y^2}-\frac{y}{x^2}}{\frac{x}{y^2}-\frac{2y}{x^2}}$;

4) $\dfrac{\frac{11}{a}+\frac{11}{b}+\frac{11}{c}}{\frac{12}{ab}+\frac{12}{bc}+\frac{12}{ac}}\cdot\frac{1}{12}$.

При каких значениях a имеет смысл дробь $\frac{a-1}{a^2+4}$:

A. все числа, кроме 4;

B. все числа, кроме 1;

C. все числа, кроме 2 и −2;

D. a — любое число?

При каких значениях x переменной не имеет смысла дробь $\frac{x-9}{x+3}$:

A. 9; B. 3; C. 0; D. −3?

Сократите дробь $\frac{8x^2-4xy}{y-2x}$:

A. 4; B. $-4x$; C. $4x$; D. −4.

Найдите дробь, равную дроби $\frac{3}{y-x}$:

A. $\frac{6}{2x-2y}$; B. $\frac{3}{y+x}$; C. $-\frac{3}{x-y}$; D. $\frac{x}{x-x}$.

Укажите верное тождество:

A. $\frac{5a}{a^2-3} = \frac{5}{a-3}$; B. $\frac{x-y}{x+y} = \frac{(x-y)^2}{x^2-y^2}$;

C. $\frac{b}{b-3} = -\frac{7b}{21-7b}$; D. $\frac{5}{12} = \frac{5}{12a}$.

Приведите к общему знаменателю дроби $\frac{1}{3x^2}$; $\frac{5}{6xy^2}$; $\frac{3}{10xy^3}$:

A. $30x^2y^3$; B. $60x^3y^3$;

C. $30x^3y^3$; D. $180x^2y^3$.

Чему равен общий знаменатель дробей $\frac{6}{3a-a^2}$; $\frac{a-1}{a^2-9}$; $\frac{4}{a^2}$:

A. a^2-9; B. $a(a^2-9)$;

C. $a(9-a^2)$; D. $a^2(9-a^2)$?

Упростите выражение $\frac{3x-26}{18x^2} - \frac{x-1}{3x^2} + \frac{2}{9x}$:

A. $\frac{13x - 26}{18x}$; B. $\frac{[illegible]x - 22}{18x}$;

C. $\frac{13x + 2}{18x}$; D. $\frac{13x - 26}{18x}$.

При каких значениях x выполняется равенство [illegible] $\frac{2}{[illegible]}$ [illegible] $\frac{3}{[illegible]}$ [illegible] $\frac{8}{[illegible]}$?

A. 1; B. 0; C. 2; D. [illegible]?

Упростите выражение [illegible] $\frac{2y}{[illegible]}$ [illegible] $\frac{3y}{[illegible]}$ [illegible] $10xy$ [illegible] $15x$ [illegible]:

A. 15; B. $15y$; C. $\frac{1}{15y}$; D. $\frac{x}{15[illegible]}$.

Упростите выражение $1 - \frac{3}{a}$ [illegible] $\frac{a}{[illegible]}$:

A. $\frac{1}{a+3}$; B. $a - 3$; C. $\frac{a}{a-3}$; D. 1.

Упростите выражение [illegible] $\frac{a^2}{[illegible]}$ [illegible] $\frac{[illegible] + 4}{[illegible] 2a + 4}$ [illegible] и найдите его значение при $a = -2$:

A. 0; B. $\frac{2}{3}$; C. 1; D. [illegible]1.

Сократите дробь $\frac{9x^2 - 24xy + 16y^2}{9x^2 - 16y^2}$:

A. $\frac{4y - 3x}{4y + 3x}$; B. $\frac{3x - 4y}{4y + 3x}$; C. $\frac{[illegible] - 3x}{3x - 4y}$; D. $\frac{1}{3x + 4y}$.

Если $\frac{2a - b}{3a - 2} = 5$, то найдите значение дроби $\frac{[illegible]b - 8a}{[illegible]}$ [illegible]:

A. 4; B. 100; C. -4; D. -100.

Упростите выражение $\left(\frac{6a}{5b}\right)^{[illegible]} \cdot \left(\frac{5b}{6a}\right)^{[illegible]} \cdot (6a)$ [illegible]:

A. $25b^{[illegible]}$; B. $\frac{[illegible]}{[illegible]}$; C. $30a^{[illegible]}b^{[illegible]}$; D. 1.

Вычислите

1) $0,7 \cdot 5^4 - 37,5$;
2) $-9^4 \cdot 2,1 + 13\,700,1$;
3) $6,3 - 10^3 \cdot 0,0073$;
4) $192 \cdot (-0,2)^3 - 0,112$;
5) $-240,02 + 7^4 \cdot 0,02$;
6) $10^4 \cdot 3,241 + 7590$.

1) $\dfrac{4^8 \cdot 12^7 \cdot 9^5}{6^{12} \cdot 16^4}$;
2) $\dfrac{21^8 \cdot 27^3 \cdot 49^6}{9^{11} \cdot 343^7}$;

3) $\dfrac{25^{11} \cdot 81^4}{625^4 \cdot 15^5 \cdot 9^6}$;
4) $\dfrac{32^9 \cdot 125^8}{8^{13} \cdot 10^7 \cdot 25^8}$.

1) $10^4 - 9^3 - 951$;
2) $15^4 + 14^4 - 9041$;
3) $6^5 - 5^5 + 7719$;
4) $-7^4 + 8^4 + 305$.

1) $\dfrac{8^8 \cdot (11^3)^5}{121^7 \cdot 4^{10}}$;
2) $\dfrac{81^{10} \cdot 169^5}{(13^3)^3 \cdot 27^{13}}$;

3) $\dfrac{49^{25} \cdot 625^{15}}{(5^{12})^5 \cdot (7^{16})^3}$;
4) $\dfrac{216^8 \cdot 125^7}{625^5 \cdot (6^3)^4}$;

5) $\dfrac{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} \cdot 32^2 \cdot 1000 \cdot 5^3}{4^7 \cdot 0,001 \cdot 25^4}$;
6) $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot 9^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot 2^6}{\left(\frac{1}{11}\right)^2 \cdot 363 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 \cdot 3^2 \cdot 2^4}$.

1) $\dfrac{27^2 - 17^2}{16^2 - 6^2}$;
2) $\dfrac{48^2 - 18^2}{35^2 - 15^2}$;
3) $\dfrac{87^2 - 43^2}{31^2 - 16^2}$;

4) $\dfrac{98^2 - 58^2}{75^2 - 35^2}$;
5) $\dfrac{123^3 - 73^3}{196} - 123 \cdot 73$;
6) $\dfrac{186^3 - 34^3}{152} + 186 \cdot 34$.

Выполните действия:

1) $243 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^6 - 8,75 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3 \cdot 0,25 + 0,12$;

2) $\left(\frac{6}{7}\right)^2 \cdot 2,45 - \left(34 - 3\frac{5}{14}\right) + 0,05 \cdot 2^5$;

3) $6{,}25 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-3} - 0{,}024 \cdot 9^{3} + 1{,}552$;

4) $\left(\frac{8}{11}\right)^{2} \cdot 0{,}5 \cdot \left(3\frac{2}{3}\right)^{2} + \left(1\frac{1}{3}\right)^{4} : 85\frac{1}{3}$.

Найдите a% от числа b, если:

1) $b = 2^5 \cdot 5^2 - 200$ и $a = 11$;
2) $b = (-3)^3 \cdot 4^4 + 6962$ и $a = 5$;
3) $b = (0{,}5)^3 \cdot 2^8 + 18^2$ и $a = 13{,}5$;
4) $b = 0{,}2^9 \cdot 5^{10} + 6^2$ и $a = 50$.

Найдите значение выражения:

1) $5a^4 - 7b^5 + 11c^3$ при $a = 2$, $b = -1$, $c = -1$;
2) $1{,}2x^5 - 3{,}9y^3 - 6c^4$ при $x = -1$, $y = 2$, $c = -2$;
3) $0{,}005n^3 + 0{,}023m^4$ при $n = -10$, $m = 10$;
4) $64t^6 - 27s^4 - 125k^3$ при $t = -\frac{1}{2}$, $s = \frac{1}{3}$, $k = -\frac{1}{5}$.

Сравните значения выражений:

1) $7^2 \cdot (-2)^3$ и $10^2 + 7^2$;
2) $\left(-\frac{2}{9}\right)^4 \cdot 0{,}729$ и $3^4 - 5^2 \cdot 1{,}01$;
3) $(-0{,}2)^3 \cdot 5^3$ и $6^4 : (11^2 - 35)$;
4) $4^5 : (2 \cdot 5^3)$ и $2^2 \cdot (0{,}9^2 + 0{,}14)$.

Используя свойства степеней, сравните значения выражений:

1) 10^{20} и 20^{10}; 2) 25^5 и 125^4; 3) 16^5 и 64^3; 4) 72^{10} и $32 \cdot 12^{10}$.

Упростите выражения:

1) $(a - 5)^2 + (a + 7)(5 - a) - 8a$;
2) $-73 + (6 - a)^2 - (9 - a)(a + 4)$;
3) $(3a - 4)(9a + 8) - (2 - 27a)(16 - a)$.

1) $(a^2 - 5)(3 + 2a) - 2a(a^2 - 4)$;
2) $(2 - 3a)^3 - 4(2 - 9a) - 26a^3$;
3) $(4 + a)^3 - (a - 4)^3 - 36(2a^2 - 3)$.

Для каких значений переменной x является тождеством равенство:

1) $(4m + x)^2 = 16m^2 + 24mn + 9n^2$;
2) $(2a - x)^2 = 4a^2 - 28ab + 49b^2$;
3) $(x + 9n)^2 = 36m^2 - 108mn + 81n^2$;
4) $(x - 6b)^2 = 64a^2 - 96ab + 36b^2$?

Для каких значений переменной y является тождеством равенство:

1) $(5a-y)^2=25a^2-2ac+0{,}04c^2$;

2) $(0{,}5a-y)^2=0{,}25a^2+6ab+36b^2$;

3) $(y-5c)^2=0{,}64a^2-8ac+25c^2$;

4) $(1{,}4a-y)^2=1{,}96a^2+16{,}8ab+36b^2$?

Докажите, что при любых значениях переменной от них не зависит значение выражения:

1) $(8ac-4)(ac-5)-4ac(2ac-9)$;

2) $(15mn-7)(12mn-8)-36mn(5mn-1)$;

3) $(10x^2-3)(9x^2-2)-3x^2(30x^2-17)+98x^2$;

4) $(4cd^2-7)^2+4cd^2(14-4cd^2)$.

Докажите, что при любых значениях переменных значение выражения равно нулю:

1) $25x^2(x^2+y^2)-25x^2(x^2-y^2)-50x^2y^2$;

2) $(5ac+8)^2-(8ac+5)^2+39(a^2c^2-1)$.

Верно ли равенство:

1) $(12a-5)^2-18a(8a-6)=12a-25$;

2) $17(a-3)^2-(4a-1)^2-22(7-5a)=a^2-2$;

3) $9\left(b-1\frac{2}{3}\right)^2-21(2b-1)-(3b-2)^2-200=0$;

4) $15(5a-6)(6-5a)+13(6a-1)^2-31(17-3a^2)-26=-156a$?

Упростите выражение:

1) $(8a-5)(9a+10)-(12a-7)(11-6a)-55a$;

2) $(14a-3)(15a+10)-(35a-2)(7-6a)-162a$;

3) $(a+3)^2-(a-7)^2-30a^2-120a$;

4) $(a-5)^2+(6-a)^2-33(20-a-a^2)$.

Докажите тождеств.

1) $(a+m-7)(a-m+7)=a^2-(m-7)^2$;

2) $(3x+5-y)(3x+5+y)+y^2=(3x+5)^2$;

3) $(6x-8y+7)(6x+8y-7)+(8y-7)^2=36x^2$;

4) $(9k+11-2m-n)(9k-2m+11+n)-9k(9k+22)-4m(m-n)=121-n^2$.

1) $4-(a-b)^2-7a-a(2b-7)=(a^2+4-b^2)$;

2) $4t^2+(3-k)^2-(2t-7+k)=k^2+2t(2t-1)+k-8(k-2)$;

3) $9x^2-(3x-2y)^2=2y(6x-2y)$.

Докажите, что тождественно равны выражения:

1) $\frac{x-2}{x^2+2x+4} - \frac{6x}{x^3-8} + \frac{1}{x-2}$ и $\frac{2x-4}{x^2+2x+4}$;

2) $\frac{2a^2-7a-3}{a^3-1} - \frac{1-2a}{a^2+a+1} - \frac{3}{a-1}$ и $\frac{1}{a-1}$.

Выполните действия над дробями:

1) $\frac{18c^4}{7d} : (-9c^2d)$;

2) $\frac{[illegible]}{9y^{[illegible]}} \cdot \frac{7x}{2y^{[illegible]}}$;

3) $\frac{8x}{10a^3} \cdot \frac{1}{5a^{[illegible]}}$;

4) $27a^3 \cdot \frac{b^2}{[illegible]} : \frac{18a^4}{7b^2}$.

Докажите тождество:

$\frac{[illegible]}{a^{[illegible]}} + \frac{3a^2-10}{2a^3-a^2-[illegible]a+2} [illegible] = \frac{6}{(a-1)^2} - \frac{[illegible]}{(a-1)^2}$.

Представьте в виде рациональной дроби выражение:

1) $\frac{3x^2}{5y^3} : \frac{27x^5}{2y^4} \cdot \frac{5y}{3xy} [illegible]$;

2) $\frac{25ab-1}{x^2d} [illegible] \cdot \frac{[illegible]}{3ab} [illegible]$;

3) $\frac{28p^4}{15q^{[illegible]}} \cdot \frac{5q^2(p-1)}{11p^{[illegible]}} : \frac{3p^2}{4q^{[illegible]}}$;

4) $\frac{8x^2y^4}{13b^{[illegible]}} \cdot \frac{15y^{[illegible]}}{[illegible]} : \frac{2x^{[illegible]}(y-2)}{[illegible]b}$.

Если $x = \frac{2n}{n-2}$, то найдите значение выражения:

1) $\frac{x}{2x} - \frac{3}{n}$;

2) $\frac{2x}{x-2n} - \frac{[illegible]}{2x}$;

3) $\frac{3x}{(2-x)x} [illegible] \frac{2}{3-x}$.

Найдите значение выражения $\left(\frac{x}{y}-1\right)^2 [illegible] \left(\frac{x}{y}-1\right) - 2$ при $x = 0{,}7$, $y = 4$.

Докажите, что при допустимых значениях переменной не зависит от переменной значения выражения:

1) $\left(\frac{4a}{a^2-1} + \frac{a-1}{a+1}\right) [illegible] \frac{a}{a+1} [illegible] \frac{a}{[illegible]}$;

2) $\left(\frac{8a}{a^2-4} + \frac{a-2}{a+2}\right) [illegible] \frac{a}{a-2} [illegible] \frac{a}{a+2}$.

1) $\frac{20a}{25 - a^2} \quad \frac{5}{a} \quad \frac{a}{5} : \frac{a-5}{5} \quad \frac{5}{5} \quad \frac{5}{a}$;

2) $\frac{28c}{c^2 - 49} \quad \frac{c}{c} - \frac{7}{7} \quad \frac{c}{c-7} \quad \frac{c}{c} \quad \frac{}{7}$.

Решите уравнения

1) $(x - 2)^2 - (x^2 + 2^2) - 2^x = 0$;

2) $(3 - x)^2 - (x^2 - 3^2) - 3^x = 0$;

3) $0,5(0,5 + 2x) + x^2 \quad 10 \quad (x^2 + 0,25) = 0$;

4) $x \quad x \quad 1\frac{1}{3} \quad \frac{4}{9} \quad \frac{3}{1} - \frac{4}{9} \quad x^2 \quad 0$.

1) $x \quad \frac{1}{2}^{\,2} = 7\frac{1}{4} + x^2$;

2) $2 - \frac{1}{64} - x^2 \quad \left(x \quad \frac{1}{8}\right)^2$;

3) $27 \quad 25x^2 \quad 2,7^2 \quad 7,29 - 5x(5x - 5,4)$;

4) $\frac{1}{49}x^2 - 7\left(-x - \frac{2}{7}\right) = -61 + \left(\frac{1}{7}x\right)^2$.

1) $x^2 - (x - 7)(x - 7) - 5 - 2(2 \quad x)$;

2) $121 \quad (11 \quad x)(x + 11) - 187 + x(x - 11)$;

3) $x^2 - 0,3 \cdot \frac{3}{10} - x = (x - 0,3)(x - 0,3)$;

4) $x - \frac{3}{4} \ (x - 0,75) - \frac{3}{4}(0,75 - x) - x^2 = 1,5$.

Решите систему уравнений графическим способом:

1) $\begin{cases} 2,25x - 2y = 3, \\ 2x - y = 5; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x - y = 5, \\ 2x + y = 10. \end{cases}$

Найдите два числа, если:

1) значение суммы первого числа, увеличенного в три раза, и второго числа, увеличенного в два раза, равно 62, а значение разности первого числа, умноженного на 5, и второго числа, умноженного на 6, равно (−18);

2) значение разности двух чисел равно 3, а значение их суммы равно (−7).

1) Найдите скорости двух автомобилей, если известно, что скорость их сближения равна 173 км/ч, а скорость удаления равна 17 км/ч.

2) Найдите скорость течения реки и собственную скорость теплохода, если его скорость по течению реки равна 47 км/ч, а против течения — 39 км/ч.

Решите систему с параметром:

1) $\begin{cases} 2x+5y-7=0, \\ px+3y-1=0; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 8x-9y+4=0, \\ 4x-py-2=0. \end{cases}$

При каких значениях переменной x принимает неотрицательное значение выражение:

1) $5x-16$; 2) $47-97x$;

3) $x^2-11-x(x-2)$; 4) $x(3+x)-x^2-33$;

5) $(x+5)^2-x^2-12x$; 6) $20x-x^2-(4-x)^2$?

При каких значениях переменной y меньше нуля значение разности двух выражений:

1) y^2-16 и $8y+y^2$; 2) $5y^2-10y$ и $17-5y^2$;

3) $(1-y)^2-13$ и y^2-6; 4) $87+y^2$ и $(y-3)^2-5$?

Постройте график уравнения:

1) $x+y-3=0$; 2) $x-y-3=0$;

3) $y-x+3=0$; 4) $y-x-3=0$;

5) $y+2x^3=0$; 6) $y-\frac{3}{x}=0$; 7) $y-\frac{0,3}{x}=0$.

Запишите формулу линейной функции, график которой проходит через точки:

1) $A(-3;\ 2)$ и $B(1;\ -1)$; 2) $M(-4;\ -2)$ и $K(2;\ 4)$;

3) $F(-1;\ 6)$ и $E(1;\ -6)$; 4) $T(5;\ 3)$ и $P(-5;\ -3)$.

Для каких значений переменной x график уравнения:

1) $2,3x-7y+4=0$; 2) $5x+4y-9=0$;

3) $x^2+y=0$; 4) $y=2x^2$;

5) $y-\frac{3}{x}=0$; 6) $y+\frac{2}{x}=0$

расположен ниже оси абсцисс?

С помощью графика функции, изображенного на рисунке 1, найдите:

1) область ее определения;

2) значения аргумента x, для которых функция возрастает;

3) значения аргумента x, для которых функция убывает;
4) координаты точек A, B, C, D;
5) координаты точек пересечения графика с осями координат;
6) уравнения, графиками которых являются прямые AB, BC, CD.

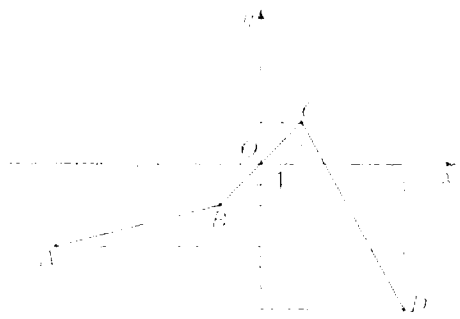


Рис. 1

Графики каких линейных функций: $y = 4x + 8$; $y = -5x - 11$; $y = 4x$; $y = 5x$; $y = 7x + 0{,}5$; $y = 6x + 0{,}5$; $y = 1{,}5x + 2$; $y = 9 - 1{,}5x$; $y = x + 4$; $y = 8 + 6x$:
1) пересекаются; 2) параллельны; 3) совпадают?

Для каких значений аргумента x являются положительными значения функции:

1) $y = 0{,}125x - 7$; 2) $y = 0{,}3 - 0{,}015x$;
3) $y = 32x - 2^5$; 4) $y = 1000x - 80$; 5) $y = 0{,}5x^2$;
6) $y = -3x^2$; 7) $y = \frac{0{,}5}{x}$; 8) $y = -\frac{3}{x}$?

Принадлежит ли графику функции $y = \frac{3}{8}x - 4$ точка:
1) $A\,(0; -1)$; 2) $B\,(8; -7)$; 3) $C\,(-8; -1)$;
4) $M\,(16; 2)$; 5) $K\,(-16; -2)$; 6) $F\,(-4; -2{,}5)$?

Запишите формулы четырех линейных функций и постройте их графики в одной и той же координатной плоскости, если известно, что график одной из них проходит через точки $F\,(3; 0)$ и $K\,(0; 3)$, другой — через точки $M\,(-6; 0)$ и $T\,(0; -6)$, а графики третьей и четвертой функций пересекают ось ординат в точке с ординатой, равной 6, и параллельны соответственно графикам первой и второй функций.

Задайте формулой линейную функцию, график которой проходит через точку $M\,(-5; 4)$ и параллелен графику функции $y = 1\frac{1}{3}x + 7$, и постройте ее график. Найдите значения аргумента линейных функций, для которых значения функции:
1) положительные; 2) отрицательные.

Мальчик прошел вниз к реке, отдохнул у реки и вернулся обратно. На рисунке 2 изображен график движения мальчика. Определите, пользуясь графиком:
1) сколько минут отдыхал мальчик у реки;

2) скорость мальчика на подъеме (в км/ч);
3) сколько минут заняла ходьба.

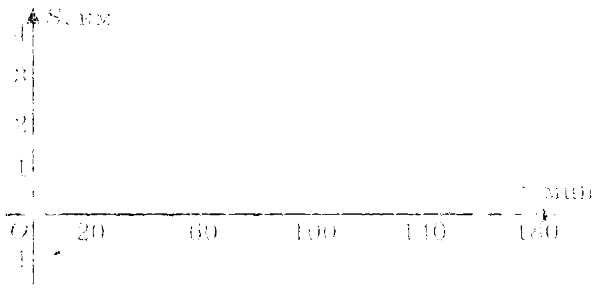


Рис. 2

1) Пчела летает от улья к цветку и обратно. На цветке она какое-то время собирает пыльцу. Расстояние от улья до цветка равно 5 м. На рисунке 3 изображен график зависимости расстояния между пчелой и ульем от времени движения пчелы. Определите, какое расстояние пролетела пчела за первые 40 с.

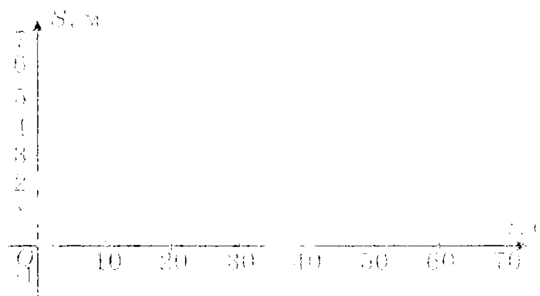


Рис. 3

На графике (рис. 4) жирными точками показана среднесуточная температура воздуха в городе N каждый день с 15 по 28 марта 2016 г. По горизонтали указываются числа месяца, по вертикали — температура в градусах Цельсия. Для наглядности жирные точки соединены линией. Определите разность между наибольшей и наименьшей среднесуточными температурами за указанный период. Ответ дайте в градусах Цельсия.

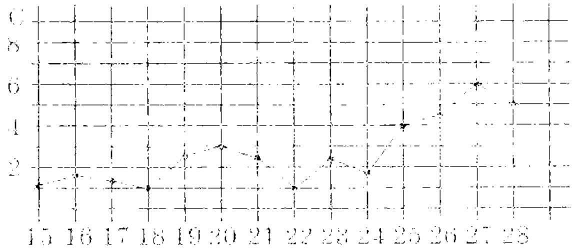


Рис. 4

В ходе химической реакции количество исходного вещества (реагента), которое ещё не вступило в реакцию, со временем постепенно уменьшается. На рисунке 5 эта зависимость представлена графиком. На оси абсцисс указывается время в минутах, прошедшее с момента начала реакции, на оси ординат — масса оставшегося реагента, который ещё не вступил в реакцию. Найдите, сколько граммов реагента вступило в реакцию за 4 мин.

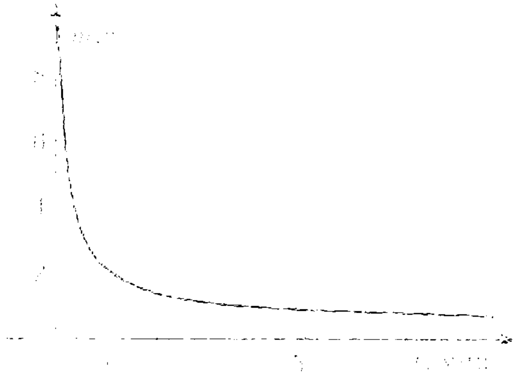


Рис. 5

Дан график функции $y = $ [illegible] (рис. 6).

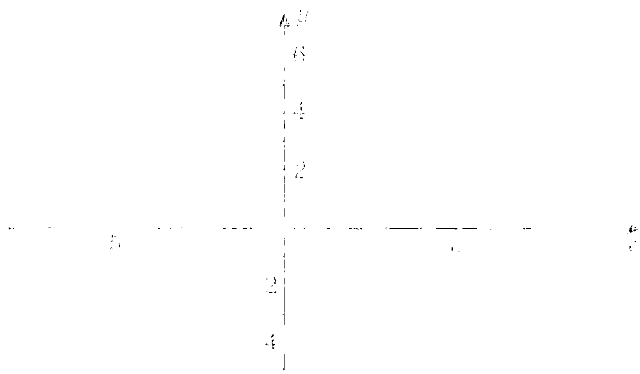


Рис. 6

По графику функции найдите множество значений переменной x, при которых функция:

1) принимает неотрицательные значения;

2) убывает;

3) принимает значения, не меньшие 2;

4) принимает значения, меньшие (−1).

Графики двух функций пересекаются в точках A и B (рис. 7). Найдите координаты точек A и B.

Дан график функции $y = \frac{5}{x}$ (рис. 8).

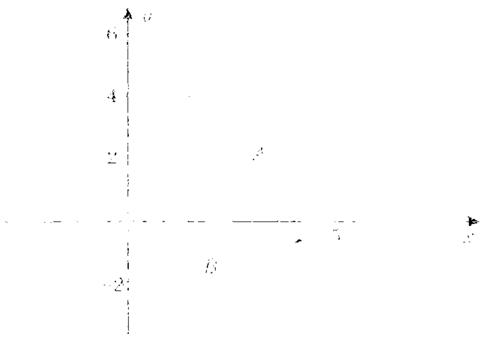


Рис. 7

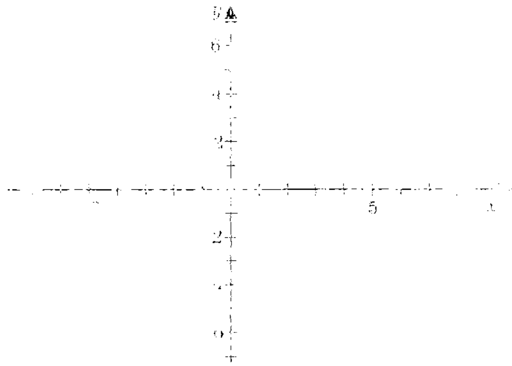


Рис. 8

Проходит ли график функции через точку:
1) $A(1; 7)$; 2) $B(-5; -1)$; 3) $C(2; 1)$; $M(-2; -2.5)$?

Известно, что $a + b + c = 9$, $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{a+c} = \frac{5}{6}$. Найдите значение выражения $\frac{c}{a+b} + \frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c}$.

Куб с длиной ребра в 1 м распилили на кубики с ребром в 1 см. Если выложить в ряд полученные кубики, то какой длины получится ряд?

После каждой стирки кусок мыла уменьшается на 20%. После скольких стирок кусок мыла уменьшится не менее чем на две трети? Найдите наименьшее такое число.

Докажите, что числовое выражение $7^{2017} - 3^{2017}$ делится на 10.

При каких натуральных значениях n дробное выражение является целым числом:

1) $\frac{n^2 - n - 3}{n + 1}$;   2) $\frac{2n^2 - 3n + 2}{2n - 1}$?

Докажите, что при любом натуральном n:

1) $7 \cdot 5^{2n} + 12 \cdot 6^n$ кратно 19;   2) $6^{2n} + 3^n + 3^{n+2}$ кратно 11;

3) $3^n + 5^n - 2^{n+1}$ кратно 3;   4) $3^n + 5^n + 7^n + 9^n$ кратно 4.

Вычислите $\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \ldots + \frac{1}{2016 \cdot 2017}$.

Докажите, что $\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{2017^2} < \frac{2016}{2017}$.

Упражнения для повторения курса математики для 5–6 классов

1. 1) [illegible] 1,5. 2) [illegible]; 3) [illegible]; 4) [illegible]. 2. 1) [illegible] 6,7; 2) 26,088; 3) [illegible] 0,58; 4) [illegible] 1. 3. 1) 196,7; 2) [illegible] 1,859; 3) [illegible]; 4) [illegible]. 4. 1) 20,[illegible]; 2) [illegible],6; 3) 95,98; 4) [illegible] 0,1875. 5. 1) 110,8; 2) [illegible] 13,5; 3) 110,18; 4) [illegible] 6,6. 6. 1) [illegible]; 2) [illegible]; 4) [illegible]; 6) [illegible]; 7) 2,1; 8) [illegible]. 8. 58 [illegible]. 9. 1) 330 км; 2) 159 км; 3) 54,7 км. 10. 1) от 100 кг до 600 кг; 2) 900 кг; 3) 3,5 м; 4) 2,4 [illegible] 2,6 м; 5) 30 000 [illegible]; 6) 100 [illegible]; 7) 68 кг; 8) 500 [illegible]; 9) 600 [illegible]. 11. 1) [illegible] 13,5; 2) [illegible] 29,[illegible]; 3) 13,5; 4) 181. 12. 1) [illegible]; 3) [illegible] 27; 4) [illegible]. 17. [illegible] 18. [illegible] 19. 1) 7,68; 2) 2,1; 3) 1313,26; 4) [illegible]. 21. [illegible] 22. 1) 1951 год; 2) [illegible]; 3) 50 [illegible]. 23. 9 [illegible]. 24. 1) 30 000 [illegible]; 2) в 5 раз. 25. 1) [illegible]; 2) 3; [illegible] 10,5; 6) 16; [illegible] 25; [illegible] 120. 27. 1) [illegible] 200; 2) 1; 3) 20; 4) 0,[illegible]. 28. 1) [illegible]; 2) [illegible] 16; [illegible]. 29. 1) [illegible]; 2) [illegible] 0,1. 31. [illegible] 32. [illegible] 34. 1) 6 см; 2) 10 см; 3) 10 см; 4) 30 см; 6) 1,1 см. 35. 120[illegible]; 150[illegible]; 60[illegible]. 36. [illegible] 38. [illegible] 50. 1) 55; 2) 11[illegible]; 3) [illegible]; 4) [illegible] 1,3; 5) [illegible] 15; 6) 3[illegible]. 52. 1) 0,625; 2) 205; 3) [illegible]; 4) [illegible] 7,5; 5) [illegible]; 6) [illegible] 2,9. 53. 1) 3; 2) [illegible]; 3) [illegible]. 54. 1) 1976 год; 2) 75 [illegible]; 3) 3,8 [illegible]. 55. 1) [illegible]; 2) [illegible]; 3) [illegible] 50[illegible]. 56. 1) 7 лет; 2) 12 лет; 3) 15 лет. 57. 1) [illegible] 1,1; 1,1; 2) [illegible] 27; 27; 3) [illegible] 81; 81; 4) [illegible]; 5) [illegible]; 6) [illegible]. 72. 1) $(-\infty; -2]$; 2) [illegible]; 3) [illegible]; 4) [illegible]. 81. 1) 3; 2) [illegible] 18; 3) [illegible] 5. 86. 1) (2; [illegible]); 2) [illegible]; 3) (1; [illegible] 7); 4) [illegible]. 87. 1) (0,5; [illegible]); 2) (11; [illegible] 2,5). 89. [illegible] (1966; 1931); 3) (250; 700). 91. 1) (0,7; [illegible] 0,2); 3) ([illegible] 0,8; 1,7). 93. 1) [illegible]. 95. 1) [illegible]; 2) 15 вариантов; 3) A, B, K и E, G, K.

Глава 1. Степень с целым показателем

1.10. 1) [illegible]; 2) [illegible]; 3) [illegible]; 4) 2,5; 5) [illegible] 0,9744. 1.11. 1) 241,1; 3) 1000; 4) 1000. 1.12. 1) [illegible]; 5) [illegible]; 6) [illegible]. 1.13. 1) [illegible]; 2) [illegible]; 3) $(5a)^{[illegible]}$ [illegible]; 4) [illegible]. 1.14. 2) 144,09; 3) 715[illegible]; 4) [illegible] 4,4. 1.15. 1) 81; 2) 3; 3) 2[illegible]; 4) 0,75. 2.6. 1) 8; 2) 13; 3) 4; 4) 6; 5) 5; 6) 3. 2.7. 5) [illegible]; 6) [illegible]. 2.8. 1) [illegible]; 2) $(-3)^{[illegible]}$; 3) [illegible]. 2.12. 1) a; 2) m; 3) $2t$ [illegible] 5; 4) $3k$. 2.13. 1) k [illegible] 1; 2) $3k$ [illegible] 2; 3) $4k$ [illegible] 10; 4) $3k$ [illegible] 13. 3.7. 1) 5; 3) 1; 4) 6. 3.9. 1) $a^{[illegible]}$; 2) $b^{[illegible]}$;

4) $(3z)^{6}$; 6) $(-ky)^{20}$. **3.10.** 1) 243; 2) 216; 3) $\frac{25}{81}$; 4) $-\frac{1}{32}$; 5) 1,21; 6) 1,69. **3.11.** 2) 64; 1,69; $2\frac{7}{9}$; 36. **3.12.** 1) 2; 2) 29; 3) 51; 4) 72. **3.14.** 1) $9^{[illegible]}$; 2) $(-10)^{[illegible]}$; 6) $(-2{,}1)^{[illegible]}$. **3.15.** 1) $11^{[illegible]}$; 2) $20^{[illegible]}$; 4) $(-9)^{[illegible]}$; 5) $\left(\frac{1}{9}\right)^{[illegible]}$; 6) $2{,}1^{[illegible]}$. **3.16.** 1) 800; 2) 81. **3.18.** 1) -125; 2) 1,44; 4) $\frac{1}{256}$. **3.19.** 1) $-19{,}2$; 2) 34. **4.4.** 1) b^{13}; 2) b^{4}; 3) b^{5}; 4) $b^{[illegible]}$; 5) $b^{[illegible]}$; 6) $b^{[illegible]}$. **4.7.** 1) 25; 2) 1000; 3) 680; 5) 56. **4.8.** 1) -32, 2) $\frac{9}{19}$. **4.10.** 1) $5^{[illegible]}$; 3) [illegible]. **4.11.** 1) 13; 2) 7; 3) 36. **4.12.** 1) -1; 2) 16. **5.7.** 6) [illegible]. **5.8.** 3) [illegible]; 5) [illegible]; 6) [illegible]. **5.9.** 4) $2\frac{7}{9}$. **5.11.** 1) $-19xy$; 2) $2a^{[illegible]}b$. **5.13.** 1) 1; 2) 1. **5.14.** 1) 144; 2) $7^{[illegible]}$. **5.15.** 1) 100; 2) 81; 3) 1; 4) $\frac{25}{19}$. **6.6.** 1) [illegible]; 2) $\frac{7}{24}$; 6) 65; 9) $1\frac{35}{64}$; 12) 8. **6.7.** 1) [illegible]; 2) [illegible]; 3) [illegible]. **7.12.** 1) $1015\frac{1}{5}$; 2) $2\frac{1}{9}$; 3) 1. **7.13.** 1) 1600; 2) [illegible]2; 3) 1. **7.14.** 1) 200; 3) 0. **8.14.** 1) $1{,}45\cdot10^{[illegible]}$ m; $5{,}98\cdot10^{[illegible]}$ m. **8.15.** $2{,}5512\cdot10^{[illegible]}$. **8.16.** 1) $2{,}7\cdot10^{[illegible]}$; 2) $8{,}321\cdot10^{[illegible]}$ m; 3) 1,3 кг. **9.4.** 1) 7; 2) -726; 3) 0,5184; 4) $-0{,}01$. **9.5.** 1) 6; 2) 1; 3) 7; 4) 25. **9.6.** 1) 4; 2) 3; 3) 3; 4) 2. **9.9.** 1) [illegible]; 3) $\frac{125}{a^{2}x}$. **9.10.** 1) 17; 2) [illegible]; 3) $\frac{[illegible]}{512}$. **9.18.** 1) $b^{[illegible]}$; 2) [illegible]; 3) a^{5}; 4) [illegible]. **9.20.** 2) [illegible]; 3) $a^{[illegible]}$. **9.21.** 1) 3; 3) 5 [illegible].

Глава 2. Многочлены

10.3. 4) $a^{[illegible]}$; 5) [illegible]; 6) $\frac{1}{16}[illegible]$. **10.4.** 4) $b^{[illegible]}$; 5) $-2{,}1a^{7}[illegible]$; 6) [illegible]. **10.6.** 4) $16a^{[illegible]}$; 5) $-60[illegible]$; 6) $36a^{[illegible]}b^{[illegible]}$. **10.7.** 1) $8m^{[illegible]}$; 2) $0{,}5x^{[illegible]}y^{[illegible]}z^{[illegible]}$; 3) $-0{,}4a^{[illegible]}x^{[illegible]}u^{3}$; 4) $12a^{[illegible]}b^{[illegible]}c^{[illegible]}$. **10.8.** 1) $1{,}2a^{[illegible]}n$; 4) [illegible]. **10.9.** 1) 9; 2) 20; 3) 35; 4) 69; 5) 28. **10.12.** 5) $(1{,}8m^{[illegible]}p^{[illegible]})^{[illegible]}$; 6) [illegible]. **10.15.** $2\frac{[illegible]}{9}$. **11.2.** 1) $8xy^{[illegible]} - 9x^{[illegible]}u + 10z^{[illegible]}$, степень 11. **11.6.** 1) $\frac{1}{3}x^{[illegible]} - 7ay^{[illegible]}$; 2) $2{,}11a^{[illegible]} + 11\frac{[illegible]}{[illegible]}y^{[illegible]}$. **11.7.** 1) $a^{[illegible]} - 11a^{[illegible]} + 40a^{[illegible]}$, 4, 2) $21b^{[illegible]} - 16b^{[illegible]} - 15$; 6; 4) $-17b^{[illegible]} - 53b - 52$; 4. **11.8.** 1) $2{,}5y^{[illegible]} - 6{,}8x$; 2; 3) $-1{,}98d^{[illegible]} + 0{,}9c^{[illegible]}$; 3. **11.10.** 1) 18. **11.11.** 1) $2\frac{13}{[illegible]}$; 2) 3,85; 3) $\frac{113}{[illegible]}$. **11.12.** 2) $39\frac{[illegible]}{[illegible]}$. **11.17.** 1) $2ax - 4ab^{[illegible]} + [illegible]b^{[illegible]}$; 2) $3b^{[illegible]} - 2a^{[illegible]}b^{[illegible]} - 3ab^{[illegible]}$. **11.18.** 1) $x^{[illegible]} - 3x - 5a$; 2) $2x - y - 3$; 3) $y + 3a^{[illegible]} - 5$; 4) $-8a - 3a - 5$. **12.7.** 1) верно; 2) верно; 3) неверно; 4) неверно. **12.8.** 1) -1; 2) 13; 3) 9; 4) 3. **12.9.** 2) 16; 3) [illegible]; 4) [illegible]. **12.14.** 1) $-3a^{[illegible]} - 9a + 17$; 2) $4x^{[illegible]} + 2x^{[illegible]} + 17$; 3) $-14b^{[illegible]} - 2{,}2b - 1$. **12.15.** 1) $14a^{[illegible]} - 7x - 6$; 2) $y + 17b^{[illegible]} - 81$; 3) $5{,}3c - 19{,}1c - 9{,}9$. **12.16.** 3) $-13t + 7mn - 8$; 4) $2{,}8a + 6{,}7b - 11{,}1d$. **12.20.** 1) $x = \frac{10}{[illegible]}$, y — любое число; 2) $a = \frac{10}{31}$, b — любое число. **13.8.** 1) $29x^{[illegible]} - 8a^{[illegible]} + 59ax$; 4) $4xy + 2\frac{1}{56}x^{[illegible]} - 2\frac{1}{56}y^{[illegible]}$.

13.10. 1) 0,5; 2) 2; 3) –3,25; 4) $6\frac{1}{5}$. **13.11.** 1) [20; +∞); 2) $\frac{1}{6}$. **13.14.** 3) 0; 4) 14,37. **13.15.** 1) $9\frac{1}{17}$; 2) $12\frac{5}{17}$. **13.16.** 1) (–∞; 30]; 2) (–∞; 1); 3) (–∞; $\frac{1}{6}$]; 4) (–∞; –4). **14.4.** 1) $5a$; 2) $2,175y$; 4) $4c$. **14.5.** 1) 1; 2) –21,8; 3) $\frac{1}{2}$; 4) 0,6. **15.5.** 1) $(a+b)(2-c+5d)$; 2) $(m-n)(14+x)$; 3) $(x-y)(x+y-0,5)$; 4) $(c+d)(x-y+5+5xy)$. **15.6.** 3) $(a-b)^2$; 4) $(m-n^2)\times$ $\times(m-n^2+n-m^2)$. **15.7.** 1) $(7-8a)\cdot(4b-a+2-ab)$. **15.8.** 4) 0; $\frac{12}{13}$; 6) 0; $1\frac{2}{7}$; 8) 0; 7. **15.10.** 1) $0,16(a-2b)(a+4b)$; 5) $2,5(xy-0,5a)(1+y-x)$. **15.12.** 2) $(169-196x)(abc-a+1)$. **15.13.** 1) –0,3; $\frac{2}{7}$; 2) –1,1; $\frac{3}{8}$. **15.14.** 1) 0; $1\frac{1}{2}$; 3,5; 2) 0; 5. **16.2.** 5) $(11a+b)(y-7)$; 6) $(13+a)(x-y)$. **16.4.** 5) $(11y-4z)(1,1-2a)$; 6) $(9t-7k)\times$ $\times(0,01+3a)$. **16.7.** 1) $(a+b)(m-n+k)$; 2) $(a+b-c)(x+y)$; 3) $(m-n)(x-y+z)$; 4) $(t-k)(a+b-c)$. **16.8.** 1) $(a+3)(a+5)$; 3) $(x+6)\cdot(x+9)$; 8) $(t-9)(t-7)$. **16.9.** 1) 2; 3; 2) –3; –2; 3) –3; 2; 4) –2; 3; 5) 1; 4. **16.10.** 1) $(2m+3n)(a-b+c)$; 2) $(3x-2a)(m-n+k)$; 3) $(7t+4k)(x-y+z)$; 4) $(11a-9b)(t+k-p)$. **16.11.** 1) 1; 2; 3; 4; 2) –1; –2; –3; –4; 3) 1; $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; 10. **17.4.** 3) –30; 4) 10. **17.7.** 3) $(a+b-7)(15-k)$; 4) $(20-x)(n-5m-4)$. **17.8.** 1) $\frac{5}{7}$; 2) $1\frac{17}{30}$; 3) 8,5; 4) $\frac{1}{4}$. **17.9.** 2) –10. **17.10.** 1) [–6; +∞); 2) (–∞; 0,75]; 3) (–∞; $11\frac{1}{3}$); 4) (–∞; –9,5). **17.14.** 1) –11; 2) 133. **17.15.** 1) [10,5; +∞); 2) [–0,1; +∞); 3) [$2\frac{2}{9}$; +∞). **17.16.** 1) 2; 2) 6. **17.17.** 1) 0; 3) 1; 4) –11. **17.19.** Если уменьшилась на 200 тг/кг, то стоимость уменьшилась на 1100 тг; если увеличилась на 200 тг/кг, то стоимость увеличилась на 1400 тг.

Глава 3. Функция. График функции

19.5. 1) –1,5; 2) –0,25; 6) 2; 7) –4; 8) 0,2. **25.7.** 2) (4; +∞); 3) (–∞; –4); 6) (–∞; 4); 7) (–4; +∞). **20.5.** 1) возрастает; 2) убывает; 4) убывает; 5) не монотонная; 6) не монотонная. **20.6.** 5) $y=x^3$; 6) $y=\frac{1}{x^3}$; 7) $y=x^4$; 8) $y=\frac{1}{x^4}$. **21.2.** а) нет; б) да; в) да; г) нет. **21.10.** 1) [–7; –3] ∪ [–2; 3] ∪ [4; 8]; 2) $x=8$; 3) а) возрастает на [–7; –3] и [–2; 3]; б) убывает на [6; 8]. **23.5.** 1) $A(-\frac{5}{11}; -5\frac{1}{11})$; 5) $A(1; -2)$; 6) $A(-2; -13)$. **23.11.** 1) $b=7,2$; 2) $b=-9$. **23.12.** 1) в I и III четвертях; 2) в I и III четвертях; 3) во II и IV четвертях; 4) во II и IV четвертях. **23.13.** 1) $y=-1,8x+4,8$; 2) $y=-9,05x+6,05$; 3) $y=5,6x+8,6$; 4) $y=6\frac{1}{3}x-9\frac{1}{3}$. **24.7.** 1) (–3; 2); 2) (4; –1); 3) (5; 5). **24.9.** 1) 3; 2) $-3\frac{9}{52}$; 3) 0,1. **25.9.** а) 1) наименьшее 0, наибольшее 125; 2) наименьшее 0, наибольшее 20; 3) наименьшее 80, наибольшее 125; 4) наименьшее 2, наибольшее 13. б) 1) наименьшее (–2), наибольшее 0; 2) наименьшее (–4,5), наибольшее 0; 3) наименьшее (–12,5), наибольшее (–8); 4) наименьшее (–18), наибольшее 0.

26.5. 1) да; 2) да; 4) да. **26.6.** 1) -2; 2) 5; 3) -4; 4) 2. **26.7.** Пересекаются. **26.10.** 1) наименьшее (-16), наибольшее 250; 2) наименьшее (-2), наибольшее 0,25; 3) наименьшее (-54), наибольшее 85,75.

Глава 4. Элементы статистики

29.5. 1) 8; 2) 12; 3) 11. **30.3.** 1) 161 см и 170 см; 2) 13,5 [illegible]. **30.7.** 1) 7; 2)

Число верных ответов	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Абсолютная частота	0	0	0	1	5	14	16	6	6
Относительная частота	0	0	0	$\frac{1}{48}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$

30.8. 1) 57,1 %; 2) 42,9 %.

Глава 5. Формулы сокращенного умножения

31.9. 1) $\{-4; 4\}$; 2) $\{-5; 5\}$; 3) $\{-1,8; 1,8\}$; 4) $\{-\frac{12}{13}; \frac{12}{13}\}$; 5) $\{-2,7; 2,7\}$; 6) $\{-\frac{11}{27}; \frac{11}{27}\}$. **31.16.** 1) $(x^2-0,7y)(x^2+0,7y)$; 2) $(t^2-0,8z^2)(t^2+0,8z^2)$; 3) $(0,9a^4-b)(0,9a^4+b)$. **31.17.** 1) $(m-n)(m+n-1)$; 2) $(3x-2y)(3x+2y-1)$; 3) $(6-8y)(12-8y)$. **31.18.** 1) 0,6; 2) $-\frac{5}{59}$; 3) $-\frac{1}{6}$; 4) -2. **31.19.** 1) $\frac{1}{11}$; 2) 0,6; 3) $\frac{10}{33}$; 4) $-\frac{9}{13}$. **31.21.** 1) a^4-y^4; 3) $-24xy$; 4) $4096-x^{12}$. **31.22.** 1) $\{0; 1; 3\}$; 2) $\{-1; 1\}$; 5) $\{2\}$; 6) $\{6\}$. **31.23.** 1) $[10; +\infty)$; 2) $(-28; +\infty)$; 3) $[\frac{1}{30}; +\infty)$; 4) $(-\infty; -27]$. **32.3.** 1) 10 201; 2) 10 404; 3) 10 609; 4) 10 816; 5) 9801; 6) 9604; 7) 9409; 8) 9216. **32.7.** 1) $(\frac{a}{2}-x)^2$; 4) $(y-\frac{1}{5}c)^2$; 5) $(\frac{1}{12}-m)^2$. **32.14.** 1) $2a(y-1)^2$; 6) $0,5cd(1-d)^2$. **32.15.** 1) $\{5\}$; 2) $\{8\frac{11}{13}\}$; 3) $\{-1\frac{1}{6}\}$; 4) $\{6\frac{2}{9}\}$. **32.16.** 1) $\{12\frac{1}{6}\}$; 2) $\{1\frac{1}{4}\}$; 3) $\{\frac{1}{2}\}$; 4) $\{5,8\}$. **32.17.** 1) $\{1,5\}$; 2) $\{3\frac{1}{3}\}$; 3) $\{\frac{1}{4}\}$; 4) $\{2\}$. **32.18.** 1) $(-\infty; 1\frac{1}{2})$; 2) $(-\infty; 1)$; 3) $(0; +\infty)$; 4) $(-\infty; 1)$. **32.19.** 1) $(-\infty; 9)$; 2) $(-8; +\infty)$; 3) $(-\infty; 3)$; 4) $[2\frac{1}{4}; +\infty)$. **32.20.** 1) $(2; +\infty)$; 2) $(10; +\infty)$; 3) $(-\infty; 5)$; 4) $(-2\frac{1}{4}; +\infty)$. **32.24.** 1) $(c-\frac{1}{2})^2$; 2) [illegible]; 4) $(\frac{2}{5}$ [illegible]$)^2$; 6) $(\frac{3x}{2y}-\frac{1}{3x})^2$. **32.26.** 1) $\{7,5\}$; 2) $\{\frac{5}{18}\}$; 3) $\{\frac{1}{20}\}$; 4) $\{0,15\}$. **32.27.** 1) $\{1\}$; 2) $\{0,95\}$; 3) $\{3\frac{2}{3}\}$; 4) $\{1\}$. **32.28.** 1) $(-\infty; 0,5)$; 3) $(\frac{1}{4}$ [illegible]$)$; 4) $(-\infty; 2\frac{1}{10})$. **32.29.**

1) $(-\infty; 2)$; 2) $(2; +\infty)$; 3) $(2; +\infty)$; 4) $(0,1; +\infty)$. 32.30. 1) $(-1; +\infty)$; 2) $(0,5; +\infty)$, 3) $(-0,2; +\infty)$. 33.6. 1) $(a-2b)^2$; 3) $(2p+3q)^2$; 4) $(xy-2)^2$. 33.14. 1) $82x+137$; 3) $57y-73$. 33.15. 1) {4}; 2) {4}; 3) {-2}; 4) {2}. 34.6. 1) $8a^2-1$; 2) $8-b$; 3) $2a^3+7x^3-7$; 4) 27. 34.8. 1) $[0,1; \infty)$; 2) $\left(-\infty; -\frac{1}{12}\right)$. 34.14. 1) $9x-34$; 3) $-12x-24$. 34.15. 1) $6x+2$. 34.16. 1) 1; 2) 32; 3) 4; 4) 6,25. 35.1. 3) $72x^4z$. 35.2. 2) $-94b^9-$ $-32,2ab^3$. 35.4. 3) y^6-125. 35.7. 1) 14; 0; 4) -8; -18. 35.9. 1) 9; 2) -1; 3) 1. 35.12. 1) $\left(-2\frac{1}{3}; +\infty\right)$; 4) $(-\infty; 3)$. 35.18. 1) $-10,75$; 2) 4; 4) -1. 35.19. 1) -8; 3) 3; 4) -2. 35.22. 1) -4; 2) 39; 3) 25; 4) -3. 36.1. 120 учебников. 36.3. 42 девочки и 30 мальчиков. 36.4. 78 яблок и 26 яблок. 36.5. 42 и 35. 36.6. 450 тг/кг и 400 тг/кг. 36.7. 21 см, 29 см, 42 см. 36.8. 18 км/ч и 2 км/ч. 36.9. 5,25 км/ч. 36.12. 1) 5 рулонов; 2) 3250 тг. 36.13. 27 л. 36.14. 60 дм и 80 дм. 36.15. 1) 50 дм и 70 дм; 2) 48 шт. 36.17. 42 м. 36.18. $\frac{7}{9}$. 36.19. 55 000 тг. 36.20. 8 км/ч. 36.21. 3 км/ч. 36.22. 1) 120 000 чел.; 2) 30%; 3) 70%. 36.23 1) 150 000 тг; 2) 109 000 тг; 3) 2500 тг. 36.25. 31, 62, 93. 36.28. 75 или 57. 36.30. 1) 2; 2) 19,8; 3) 6,6; 4) $1\frac{23}{55}$. 36.31. 1) $6x^4+x^2y-2y^2$.

Глава 6. Алгебраические дроби

37.1. 3, 4, 6. 37.2. 1) $1\frac{2}{3}$; 1; 2,2; 0; $2\frac{5}{6}$; 1,99; 4) 15, $6\frac{1}{8}$, 6; 8; 5) $-0,5$; $-8,9$; $8\frac{7}{8}$; $6\frac{5}{6}$. 37.4. 1) 2; 3) $y \neq 0$; 3; 5) $y \neq 2$; 1. 37.5. 1) $\frac{xy}{2x-3y}$; 2) $\frac{2a-b-1}{2a(b-1)}$. 37.6. 1) $(-\infty; +\infty)$; 2) $(-\infty; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$; 5) $\left(-\infty; -\frac{2}{7}\right) \cup \left(-\frac{2}{7}; 0\right) \cup (0; +\infty)$. 37.7. 1) $(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; 3) \cup (3; +\infty)$; 3) $(-\infty; -5) \cup (-5; +\infty)$. 37.8. 1) $\frac{5x}{x-3}$; 3) $\frac{7}{x-2}$; 5) $\frac{x-7}{(x-5)(x-5)}$. 37.9. $t = \frac{s}{v_1+v_2}$; 1) 3,5 ч; 2) 3 ч. 38.1. 1) $\frac{4x}{5y}$; 3) $\frac{3y^2}{2a}$; 5) $-\frac{ax}{3y}$; 7) $\frac{9ac}{8}$. 38.2. 1) $\frac{3b}{4}$; 3) $\frac{4a^2}{c}$; 4) $\frac{9x}{7y^2}$; 7) $\frac{6m^2}{5}$. 38.3. 1) $\frac{16a^3c}{4a^5c^2}$, 3) $\frac{8a^5}{4a^5c^2}$; 3) $\frac{22a^4}{4a^5c^2}$. 38.4. 1) $\frac{2y(a-b)}{(a-b)^2}$; 3) $\frac{5a(y^2+y+1)}{y^3-1}$; 5) $\frac{-9y}{b-a}$; 7) $\frac{-4p(2-p)}{4-p^2}$; 9) $\frac{35axy}{15x^2y^3}$. 38.5. 1) x^2; 3) $-a^6$; 5) -1; 7) $(a+b)$. 38.6. 1) $-0,6$; 2) $13\frac{4}{9}$. 38.7. 1) $\frac{a}{b}$; 3) $-\frac{5+a}{3}$; 5) $\frac{-5}{x^2}$; 7) $\frac{3}{1-x}$, 8) $b-2$. 38.8. 1) $-\frac{3}{8}$; 4) $\frac{9(x+2y)}{5}$; 5) $\frac{a+b}{c}$; 7) $4(a-b)$; 9) $\frac{2x+y}{4}$. 38.9. 1) $\frac{3}{7}$, 2) $\frac{1}{14}$; 3) $\frac{1}{49}$; 4) $\frac{4}{7}$. 38.10. 1) 75; 2) 1,2; 3) -2; 4) 2,5. 38.11. 6 дет./ч, 9 дет./ч. 38.12. 1) $2\frac{7}{15}$;

2) [illegible]; 3) 2,5. 39.1. 1) [illegible]; 3) [illegible]; 5) [illegible]. 39.2. 1) [illegible]; 3) [illegible];

5) [illegible]. 39.3. 1) [illegible]; 4) [illegible]; 6) [illegible]; 8) [illegible]. 39.4. 1) [illegible];

3) [illegible]; 5) [illegible]. 39.5. 1) [illegible]; 3) [illegible]; 5) [illegible]. 39.6. 1) 60;

3) 36,25; 4) 2. 39.7. 1) 80; 2) [illegible]; 3) 1,25. 39.8. 1) 1; 3) 2; 5) [illegible];

7) [illegible]. 39.9. 1) [illegible]; 3) 7; 5) 2; 7) [illegible]; 8) [illegible] 1. 39.10. 1) 4; 2) 3.

39.11. 1) [illegible]; 3) [illegible]; 5) [illegible]; 7) [illegible]; 9) [illegible]. 39.12. 1) [illegible] 4;

2) [illegible]; 3) [illegible]; 6) [illegible]. 39.15. 1) [illegible]; 2) [illegible];

3) [illegible]; 8) [illegible]. 39.16. 1) [illegible]; 2) [illegible]; 3) [illegible];

5) [illegible]; 6) [illegible]. 39.19. 1) 0,2; 2) [illegible]. 39.20. 1) 2; 2) [illegible]; 5) [illegible];

7) [illegible]. 39.21. 1) [illegible]; 3) [illegible]. 39.22. 5) [illegible]; 8) [illegible].

39.25. 350 m; 900 m. 40.1. 1) [illegible]; 3) [illegible]. 40.2. 4) [illegible]; 7) [illegible];

9) [illegible]; 12) [illegible]; 15) [illegible]. 40.3. 1) [illegible]; 9) [illegible]; 11) [illegible]. 40.4. 2) [illegible]; 4) [illegible];

5) [illegible]; 7) [illegible]; 9) [illegible]. 40.5. 1) [illegible]; 2) [illegible]; 3) [illegible];

5) [illegible]. 40.6. 1) 1,5; 2) [illegible]. 40.7. 1) [illegible]; 2) [illegible]; 4) [illegible].

40.8. 1) [illegible]; 4) [illegible]. 40.9. 1) [illegible]; 2) [illegible]; 5) [illegible]; 6) [illegible].

40.11. 1) 1,5; 2) [illegible]; 3) [illegible]; 4) [illegible]; 5) [illegible]. 40.12. 1) [illegible];

2) [illegible]; 3) [illegible]; 4) [illegible]. 40.14. 1) [illegible]. 40.16. 1) [illegible]; 2) [illegible].

40.17. 1) 1; 2) [illegible]. 40.18. [illegible]. 41.1. 1) [illegible]; 3) [illegible]; 5) [illegible];

9) [illegible]. 41.2. 1) [illegible]; 3) [illegible]. 41.3. 1) 6; 2) 12. 41.4. 1) [illegible]; 2) [illegible];

3) $\frac{3(a-b)}{a-n}$; 4) $\frac{1}{ab}$. **41.6.** 1) -12. **41.7.** 1) $2a$; 2) $\frac{y+1}{1-a}$; 3) $\frac{c}{c+2}$; 4) $1{,}5x$.

41.8. 1) $\frac{(a+2)^2}{a}$; 2) $(a^3-1)(a^3+1)$. **41.9.** 1) правильно; 2) правильно. **41.10.** 1) $\frac{2}{c-3}$;

2) $\frac{3(c-2)}{c-2}$; 3) $\frac{3(c-1)}{4(c-1)}$. **41.11.** 1) $\frac{2}{9x(x-1)}$; 2) $\frac{bc^2}{d^2}$; 3) $\frac{pq^3(p-1)}{3}$.

41.12. 1) $\frac{6}{n^2+8n}$; 3) $\frac{3n^2-7n-4}{2n^2}$. **41.16.** 1) правильно; 2) правильно. **41.17.** 1) a^2+1;

2) 1; 3) $-x$; 4) a. **41.18.** 1) $\frac{1}{a^2+a+1}$; 2) 1. **41.19.** 2) $2x(x+y)$; 3) $\frac{(b-2a)2a}{2a+b}$.

41.20. 1) 1,2. 2) $1\frac{5}{6}$. **41.21.** 1) $x=\frac{1}{6}$; $y=\frac{1}{6}$; 2) $x=1$; $y=-1$; 3) $x=\frac{1}{6}$; $y=-\frac{1}{6}$;

4) $x=-1$; $y=2$. **41.22.** $1\frac{3}{4}$. **41.23.** 1) $\frac{a-2b}{b}$; 2) $\frac{1}{2}$. **41.26.** 1) $\frac{3x-2}{3x+2}$; 2) $\frac{1}{3}$;

3) $\frac{2x^3}{x^3}-\frac{y^3}{2y^3}$.

Упражнения для повторения курса алгебры для 7 класса

1. 1) 400; 2) -78; 3) -1; 4) $-1{,}648$; 5) -192; 6) 40000. **2.** 1) 12; 2) $\frac{3}{7}$; 3) $1\frac{2}{3}$;

4) 2,5. **3.** 3) 31120; 4) 2000. **4.** 1) 22; 2) 39; 3) 49; 4) 6480. **5.** 1) 2; 2) $1\frac{49}{50}$; 3) $8\frac{16}{141}$;

4) $1\frac{25}{55}$; 5) 2500; 6) 48 400. **8.** 1) 76; 2) $-34{,}5$; 3) 18; 4) -1. **12.** 1) 27; 3) -44; 3) -370; 4) 1001.

22. 1) $\frac{-2c^2}{7d^2}$; 2) $\frac{4y^2}{9x^4}$; 3) $\frac{3x}{2a}$; 4) $\frac{21ab}{2}$. **24.** 1) $\frac{2y^2}{27x^5(x-1)}$; 4) $\frac{a^2y^2}{y+2}$. **25.** 1) $\frac{6}{a^2}-\frac{n}{2n}$.

29. 1) 2; 2) 1,5; 3) 10; 4) $\frac{9}{16}$. **30.** 1) -7; 2) 8; 3) -1; 4) -9. **31.** 1) 20; 2) -17;

3) 0; 4) -2. **33.** 1) 12; 13; 2) -2; -5. **34.** 1) 95 км/ч; 2) 78 км/ч. 1) 43 км/ч;

2) 4 км/ч. **36.** 3) $[5{,}5; +\infty)$; 4) $[11; +\infty)$; 5) $(-\infty; 12{,}5]$; 6) $[\frac{4}{7}; +\infty)$. **37.** 1) $(-2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 1{,}7)$;

3) $(-10; +\infty)$; 4) $(-\infty; 13\frac{5}{6})$. **39.** 1) $y=\frac{3}{4}x-\frac{1}{4}$; 2) $y=x+2$; 3) $y=-6x$; 4) $y=0{,}6x$.

40. 1) $(-\infty; 2)$; 2) $(1{,}8; +\infty)$; **43.** 1) $(-\infty; 56)$; 2) $(-\infty; 20)$; 3) $(4; +\infty)$; 4) $(0{,}08; +\infty)$.

45. $y=x-3$; $y=-x-6$; $y=x+6$; $y=-x+6$. **46.** $y=1\frac{1}{3}x-2\frac{2}{3}$; 1) $(2; +\infty)$; 2) $(-\infty; 2)$.

54. 4,5. *Указание.* Умножим обе части второго равенства на 9, получим:

$\frac{9}{a+b}+\frac{9}{b+c}+\frac{9}{a+c}=\frac{45}{6}=\frac{15}{2}$. Вместо числа 9 подставим $a+b+c$, тогда получим:

$\frac{a+b+c}{a+b}+\frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{a+c}=\frac{15}{2}$ или $1+\frac{c}{a+b}+1+\frac{a}{b+c}+1+\frac{b}{a+c}=\frac{15}{2}$.

Отсюда находим $\frac{c}{a+b}+\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}=\frac{15}{2}-3=4,5$. **56.** После пятой стирки.

60. $\frac{2016}{2017}$. *Указание*. Использовать равенство $\frac{1}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$.

Учебное издание

Абылкасымова Алма Есимбековна
Кучер Татьяна Павловна
Жумагулова Зауре Абдыкеновна
Корчевский Владимир Евгеньевич

АЛГЕБРА

Учебник для 7 класса общеобразовательных школ

Редактор С. *Родионова*
Худож. редактор А. *Сланова*
Техн. редактор *И. Тарапунец*
Корректор *Л. Байтенова*
Компьютерная верстка *Л. Жаксылыковой*

Государственная лицензия № 0000001 выдана издательству
Министерством образования и науки Республики Казахстан
7 июля 2003 года

ИБ № 5604

Подписано в печать 25.06.17. Формат $70\times100^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Гарнитура "MM Mektuptik". Печать офсетная. Усл.-печ. л. 23,22+0,32 форзац.
Усл. кр.-отт. 94,76. Уч.-изд. л. 9,91+0,54 форзац. Тираж 80000 экз. Заказ № 49574.

Издательство "Мектеп", 050009, г. Алматы, пр. Абая, 143
Факс : 8(727) 394-37-58, 394-42-30.
Тел.: 8(727) 394-41-76, 394-42-34.
E-mail: mektep@mail.ru
Web-site: www.mektep.kz

Отпечатано в филиале «Смоленский полиграфический комбинат»
ОАО «Издательство «Высшая школа», 214020, Смоленск, ул. Смольянинова, 1
Тел.: +7 (4812) 31-11-96. Факс: +7 (4812) 31-31-70
E-mail: spk@smolpk.ru http://www.smolpk.ru